

Fiche de cours

Produit scalaire

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

1 DÉFINITIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Définition — norme et angle. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, leur **produit scalaire** est le nombre réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}),$$

où $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'angle géométrique des deux vecteurs. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, noté $\vec{u}^2$; en particulier $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$.

Définition — projection orthogonale. Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) , alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens,} \\ -AB \times AH & \text{s'ils sont de sens contraires.} \end{cases}$$

Définition. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur; deux droites sont perpendiculaires si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Méthode — choisir la bonne méthode. Coordonnées connues $\rightarrow$ expression analytique; longueurs et angle connus $\rightarrow$ norme et cosinus; perpendiculaires sur la figure $\rightarrow$ projection; vecteurs composés $\rightarrow$ Chasles puis règles de calcul.

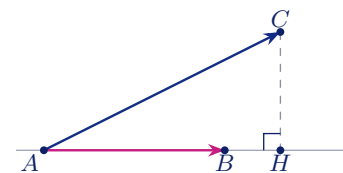


Figure 1 — Ici $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens :
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$.

2 RÈGLES DE CALCUL

Propriété — symétrie et bilinéarité. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}, \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v}).$$

Méthode — dans une figure. Décomposer les vecteurs avec la relation de Chasles sur des vecteurs dont on connaît les normes et les angles, puis développer par bilinéarité : les termes orthogonaux disparaissent.

■ FORMULAIRE — Développements à connaître

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$; $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$; $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.
- On en déduit $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$: un produit scalaire se calcule avec trois longueurs.

3 EXPRESSION DANS UNE BASE ORTHONORMÉE

Propriété. Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy', \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0.$$

En particulier, si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Propriété — coordonnées par produits scalaires. Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées de $\vec{u}$ sont $x = \vec{u} \cdot \vec{i}$ et $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$.

Méthode — calculer un angle. Écrire $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$, en calculant le produit scalaire et les normes par les coordonnées.

Remarque. Pour deux vecteurs non nuls, le signe du produit scalaire renseigne sur l'angle : $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ si l'angle est aigu, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ s'il est droit, $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ s'il est obtus.

4 APPLICATIONS AUX LONGUEURS ET AUX LIEUX DE POINTS

Théorème — formule d'Al-Kashi. Dans un triangle ABC , en notant $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{BAC}.$$

Idée : $BC^2 = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2 = AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + AB^2$. Si $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$, on retrouve le théorème de Pythagore.

Propriété — produit scalaire $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$. Si I est le milieu de $[AB]$, alors pour tout point M :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Propriété. L'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le **cercle de diamètre $[AB]$** : c'est l'ensemble des points d'où l'on « voit » $[AB]$ sous un angle droit, complété par A et B .

Remarque. En physique, le **travail** d'une force constante $\vec{F}$ dont le point d'application se déplace de A à B est $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$: nul si $\vec{F}$ est orthogonale au déplacement.

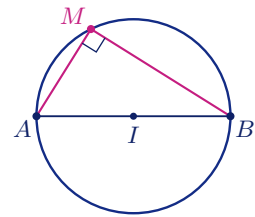


Figure 2 — $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$: le triangle AMB est rectangle en M .

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Calculer un produit scalaire par la méthode adaptée : coordonnées, norme et angle, projection, relation de Chasles.
- Démontrer que deux vecteurs, deux droites ou deux segments sont orthogonaux.
- Calculer une longueur avec Al-Kashi, un angle avec le produit scalaire ; développer $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2$.
- Déterminer un ensemble de points défini par $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$ (à l'aide du milieu I de $[AB]$).
- Résoudre un problème de géométrie ; calculer le travail d'une force.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — avec les coordonnées

Dans un repère orthonormé, $A(1; 2)$, $B(4; 3)$ et $C(2; -1)$. Alors $\vec{AB}(3; 1)$ et $\vec{AC}(1; -3)$, donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times 1 + 1 \times (-3) = 0$: le triangle ABC est rectangle en A .

★ EXEMPLE — avec norme et angle

$ABCD$ est un carré de côté 4. Alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \frac{\pi}{4} = 4 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$; par projection, le projeté orthogonal de C sur (AB) étant B , on retrouve $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = 16$.

★ EXEMPLE — Al-Kashi

Dans un triangle, $AB = 5$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Alors $BC^2 = 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2} = 49$, donc $BC = 7$.

★ EXEMPLE — ensemble de points

A et B sont tels que $AB = 6$ et I est le milieu de $[AB]$. L'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 7$ vérifie $MI^2 - 9 = 7$, soit $MI = 4$: c'est le cercle de centre I et de rayon 4.

✗ PIÈGES

- Le produit scalaire est un *nombre*, pas un vecteur : écrire $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et non $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ n'entraîne pas $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'entraîne pas $\vec{v} = \vec{w}$: on ne « simplifie » pas par un vecteur.
- Les formules $xx' + yy'$ et $\sqrt{x^2 + y^2}$ ne valent que dans un repère **orthonormé**.
- Dans la projection, le signe dépend du sens : $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ est négatif quand l'angle est obtus.
- Al-Kashi : le double produit porte sur les deux côtés qui *encadrent* l'angle ; ne pas oublier le signe $-$.