

Exercices 2 Produit scalaire

Application : travail d'une force, angles d'un triangle, distance inaccessible, format A4, décomposer une force

5 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Choisir la méthode de calcul adaptée : normes et angle, trois longueurs (Al-Kashi, identités), coordonnées, décomposition.
- Calculer des angles et des longueurs dans un triangle, à la calculatrice si besoin (touche $\cos^{-1}$, en mode degrés).
- Démontrer une orthogonalité ; utiliser le produit scalaire en physique (travail, décomposition d'une force).

Exercice 1 Le téléski

●●○

Une skieuse de masse $m = 72 \text{ kg}$ remonte une piste rectiligne $[AB]$ de longueur $AB = 600 \text{ m}$, inclinée de 15° par rapport à l'horizontale, tirée par la perche d'un téléski. On admet que les forces qui s'exercent sur elle sont constantes (figure 1) : la force $\vec{F}$ exercée par la perche, de valeur $F = 250 \text{ N}$, qui fait un angle de 22° avec $\vec{AB}$; son poids $\vec{P}$, vertical, de valeur $P = mg$ avec $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$; la réaction $\vec{R}$ de la piste, perpendiculaire à la piste ; la force de frottement $\vec{f}$, de valeur 40 N , de sens opposé au déplacement.

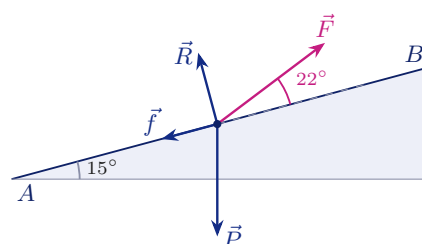


Figure 1 — Les forces qui s'exercent sur la skieuse

Le travail d'une force constante $\vec{F}$ lors d'un déplacement rectiligne de A à B est $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ (en joules si F est en newtons et AB en mètres).

- 1.1 Calculer le travail de $\vec{F}$ sur le trajet AB , en arrondissant à 100 J près. Que vaut le travail de $\vec{R}$? Celui de $\vec{f}$?
- 1.2 Justifier que l'angle $(\vec{P}, \vec{AB})$ mesure 105° , puis calculer $W_{AB}(\vec{P})$. Calculer le dénivelé h de la piste, et vérifier que $W_{AB}(\vec{P}) = -mgh$.
- 1.3 Calculer la somme des travaux des quatre forces. Est-elle positive ou négative ? À partir de quelle valeur de F (angle de 22° inchangé) cette somme est-elle positive ?

Exercice 2 Les angles d'un triangle

●●○

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2; 1)$, $B(4; -1)$ et $C(1; 5)$.

- 2.1 Calculer les longueurs AB , AC et BC , puis les produits scalaires $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.
- 2.2 Montrer que l'angle $\widehat{ABC}$ mesure exactement 45° . Calculer une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au dixième de degré, puis en déduire une mesure de l'angle $\widehat{ACB}$. Vérifier ce dernier résultat en calculant $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.
- 2.3 On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . À l'aide de la question 2.1, calculer la longueur AH , puis la hauteur CH . En déduire l'aire du triangle ABC .

Exercice 3 Mesurer une distance inaccessible



Un géomètre veut connaître la distance entre deux arbres A et B situés sur les rives opposées d'un étang (figure 2). Depuis un point C , il mesure $CA = 180$ m, $CB = 250$ m et l'angle $\widehat{ACB} = 72^\circ$.

- 3.1 Calculer la distance AB , arrondie au mètre.
- 3.2 Calculer une mesure des angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CBA}$, arrondie au degré.
- 3.3 Le géomètre veut placer un piquet K sur le segment $[CB]$ de sorte que le triangle ACK soit rectangle en K . Calculer CK à l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$, arrondie au dixième.

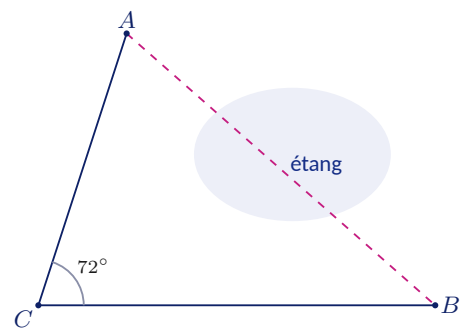


Figure 2 — Vue de dessus (sans échelle)

Exercice 4 Le format A4



$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = L$ et $AD = \ell$, avec $L > \ell > 0$; I est le milieu de $[AB]$ (figure 3).

- 4.1 En écrivant $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, démontrer que $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{L^2}{2} - \ell^2$.
- 4.2 En déduire que les droites (DI) et (AC) sont perpendiculaires si, et seulement si, $L = \ell\sqrt{2}$.

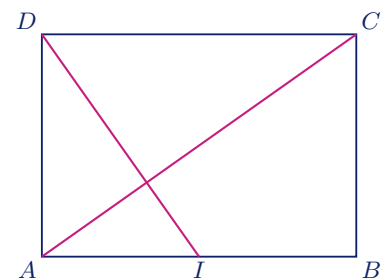


Figure 3 — Le rectangle $ABCD$

- 4.3 Une feuille A4 mesure 21 cm sur 29,7 cm. Calculer $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC}$ en prenant le centimètre pour unité. Le résultat n'est pas nul : comment l'expliquer ? Pourquoi dit-on pourtant que, sur une feuille A4, la diagonale et la droite (DI) sont perpendiculaires ?
- 4.4 Le format américain « Letter » mesure 21,59 cm sur 27,94 cm. Calculer $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis une mesure, arrondie au dixième de degré, de l'angle $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice 5 Décomposer une force dans une base adaptée



Une caisse est posée sur un plan incliné de 30° par rapport à l'horizontale. On munit le plan de la figure d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$: $\vec{i}$ est dirigé selon la ligne de plus grande pente, vers le haut, et $\vec{j}$ lui est perpendiculaire (figure 4).

- 5.1 Le poids $\vec{P}$ de la caisse est vertical, vers le bas, de valeur 50 N. Justifier que $(\vec{P}, \vec{i}) = 120^\circ$ et $(\vec{P}, \vec{j}) = 150^\circ$, puis calculer $\vec{P} \cdot \vec{i}$ et $\vec{P} \cdot \vec{j}$. En déduire les coordonnées de $\vec{P}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et vérifier sa norme.

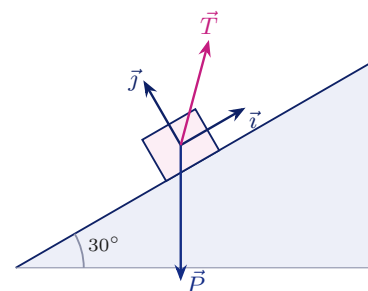


Figure 4 — La caisse sur le plan incliné

- 5.2 On tire la caisse avec une corde : la force $\vec{T}$ exercée par la corde a pour valeur 40 N et fait un angle de 45° avec $\vec{i}$ (vers le haut de la pente et au-dessus du plan). Déterminer les coordonnées de $\vec{T}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
- 5.3 On néglige les frottements ; la réaction du plan est dirigée selon $\vec{j}$. On admet que la caisse, immobile au départ et qui reste au contact du plan, se met à glisser vers le haut de la pente si, et seulement si, la coordonnée selon $\vec{i}$ de la somme $\vec{P} + \vec{T}$ est strictement positive. Est-ce le cas ? À partir de quelle valeur de la force $\vec{T}$ (angle de 45° inchangé) la caisse monte-t-elle ?
- 5.4 Reprendre la dernière question lorsque la corde fait un angle de 30° , puis de 15° , avec $\vec{i}$ (valeur seuil de T arrondie au newton).