

Contrôle A

 Produit scalaireQCM, calculs en repère orthonormé, formule d'Al-Kashi, cercle de diamètre $[AB]$

Durée : 1 h · sans calculatrice · 4 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

La calculatrice n'est pas autorisée. Les réponses du QCM ne demandent aucune justification ; dans les autres exercices, tout résultat doit être justifié par un calcul ou un raisonnement, et les résultats sont donnés sous forme exacte. Les mesures d'angles demandées sont données en degrés. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●○○○

Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 1.1 Si $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à :
- a) 6 b) -6 c) $-6\sqrt{3}$ d) $6\sqrt{3}$
- 1.2 Dans une base orthonormée, les vecteurs $\vec{u}(-2; 5)$ et $\vec{v}(a; 2)$ sont orthogonaux lorsque :
- a) $a = -5$ b) $a = \frac{2}{5}$ c) $a = 5$ d) $a = -\frac{2}{5}$
- 1.3 Si $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$, alors $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ est égal à :
- a) 11 b) 13 c) 15 d) $\sqrt{11}$
- 1.4 Dans un triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 3$ et $BC = \sqrt{7}$, l'angle $\widehat{BAC}$ mesure :
- a) 30° b) 45° c) 60° d) 120°
- 1.5 $ABCD$ est un carré de côté 3. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$ est égal à :
- a) 9 b) -9 c) $9\sqrt{2}$ d) 0

Exercice 2 Dans un repère orthonormé

4 pts ●○○○

Les points A , B , C et D sont placés sur le quadrillage de la figure 1, dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 2.1 Lire les coordonnées des quatre points, puis celles des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
- 2.2 Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?
- 2.3 Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, puis les longueurs AB et AD . En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$.
- 2.4 Calculer $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$ et la longueur BD . Quelle est la nature du triangle ABD ? Ce résultat est-il cohérent avec celui de la question 2.3 ?

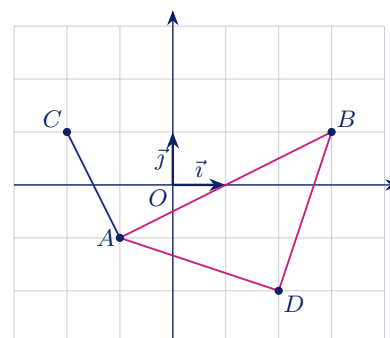


Figure 1 — Quatre points du quadrillage

2.5 Un vecteur $\vec{w}(x; y)$ vérifie $\vec{w} \cdot \vec{AB} = 10$ et $\vec{w} \cdot \vec{AC} = 5$. Déterminer ses coordonnées.

Exercice 3 Un triangle et la formule d'Al-Kashi

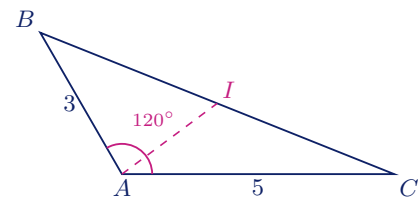
5 pts ●●○

ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 120^\circ$ (figure 2).

3.1 Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

3.2 Démontrer que $BC = 7$.

3.3 Calculer $\cos \widehat{ABC}$. L'angle $\widehat{ABC}$ est-il aigu ou obtus ?

Figure 2 — Le triangle ABC

3.4 On note I le milieu de $[BC]$. Justifier que $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$, puis calculer AI^2 et la longueur AI de la médiane issue de A .

3.5 On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) . En utilisant le résultat de la question 3.1, calculer la longueur AH et préciser si H appartient ou non au segment $[AC]$. En déduire la hauteur BH , puis l'aire du triangle ABC .

Exercice 4 Le cercle de diamètre $[AB]$

6 pts ●●○

Partie A — Démonstration de cours

A et B sont deux points distincts du plan et I est le milieu du segment $[AB]$.

4.1 Démontrer que, pour tout point M du plan, $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

4.2 En déduire la nature de l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

Partie B — Application dans un carré

$ABCD$ est un carré de côté 4, de centre O ; I est le milieu de $[AB]$ (figure 3). On garde les notations de la partie A.

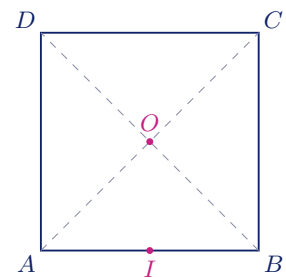
4.3 Calculer $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$. Que peut-on en déduire pour le point O ?

4.4 Calculer $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ à l'aide d'un projeté orthogonal.

4.5 Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 16$; préciser son centre et son rayon. Justifier que les points C et D appartiennent à $\mathcal{E}$.

4.6 Existe-t-il des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -5$? Quelle est la plus petite valeur possible de $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ lorsque M décrit le plan, et pour quel point est-elle atteinte ?

4.7 La droite (OI) recoupe Γ en un point E distinct de O . Préciser la position de E , puis la nature du quadrilatère $AOBE$.

Figure 3 — Le carré $ABCD$