

Approfondissement

Produit scalaire

Pour aller plus loin : Al-Kashi et loi des sinus, cercle de diamètre $[AB]$ et puissance d'un point, concours des hauteurs, théorème de la médiane et lignes de niveau, inégalité de Cauchy-Schwarz, centre de gravité

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 3 h · sans calculatrice

Exercice 1 Démonstration : formule d'Al-Kashi, puis loi des sinus

●●●

ABC est un triangle ; on note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, et $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ les mesures de ses angles.

- 1.1 (Démonstration exigible.) En écrivant $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, démontrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$. Quel théorème de collège retrouve-t-on lorsque $\hat{A} = 90^\circ$? Démontrer aussi sa réciproque.
- 1.2 (Prolongement du programme.) On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et S l'aire du triangle ABC . Justifier que $CH = b \sin \hat{A}$, que l'angle $\hat{A}$ soit aigu ou obtus. En déduire que $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$, puis la loi des sinus : $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2S}$.
- 1.3 Application : dans un triangle ABC , $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ et $BC = 6$. Calculer AC . Démontrer ensuite, à l'aide de la formule d'Al-Kashi, que $c = AB$ vérifie $c^2 - 6\sqrt{3}c + 18 = 0$; résoudre cette équation et expliquer pourquoi une seule de ses solutions convient (on pourra comparer les angles, puis les côtés opposés).

Exercice 2 Le cercle de diamètre $[AB]$ et la puissance d'un point

●●●

- 2.1 (Démonstration exigible.) Soit A et B deux points distincts et I le milieu de $[AB]$. Démontrer que, pour tout point M , $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$, puis que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$. En déduire que si M est un point de ce cercle distinct de A et de B , le triangle AMB est rectangle en M .

(Hors programme — pour aller plus loin.) Soit C un cercle de centre O et de rayon r , et P un point du plan qui n'appartient pas à C . Une droite passant par P coupe C en deux points M et N ; on note M' le point diamétralement opposé à M sur C (figure 1).

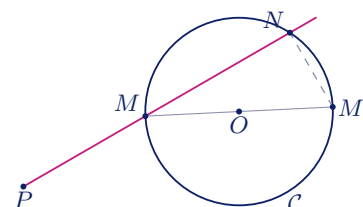


Figure 1 — La puissance du point P

- 2.2 On suppose $N \neq M'$. Justifier que N est le projeté orthogonal de M' sur la droite (PM) , puis que $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PM'}$.
- 2.3 En utilisant la question 2.1 avec le segment $[MM']$, démontrer que $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = PO^2 - r^2$. Ce nombre, qui ne dépend pas de la droite choisie, est appelé *puissance du point P par rapport à C* .
- 2.4 Application : $PO = 5$ et $r = 3$. Une droite passant par P coupe C en M et N , avec $PN = 5$. Calculer PM , puis MN . Si T est le point de contact d'une tangente à C issue de P , calculer PT de deux façons.

Exercice 3 Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes

●●●

- 3.1 Démontrer que, pour tous points A, B, C et M du plan : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ (on pourra écrire $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$).
- 3.2 ABC est un triangle, et H le point d'intersection des hauteurs issues de A et de B . En appliquant la relation précédente avec $M = H$, démontrer que H appartient aussi à la hauteur issue de C .

- 3.3** Application : dans un repère orthonormé, $A(-1;0)$, $B(4;0)$ et $C(1;3)$. Déterminer les coordonnées $(x; y)$ de l'orthocentre H en traduisant $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, puis vérifier que $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
- 3.4** (Hors programme — pour aller plus loin : droite d'Euler.) Vérifier que le point $\Omega\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , calculer les coordonnées du centre de gravité G , puis démontrer que $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$. Que peut-on en déduire pour les points Ω , G et H ?

Exercice 4 Théorème de la médiane et lignes de niveau



A et B sont deux points tels que $AB = 6$, et I est le milieu de $[AB]$.

- 4.1** En écrivant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$, démontrer que, pour tout point M : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ (théorème de la médiane) et $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.
- 4.2** Application : un triangle ABC vérifie $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 7$. Calculer la longueur de la médiane issue de C .
- 4.3** Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 36$, puis celui des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 68$. Interpréter le premier résultat à l'aide du théorème de Pythagore.
- 4.4** Lignes de niveau. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, Ω un point et k un réel. On note K le point défini par $\overrightarrow{\Omega K} = \frac{k}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$. Démontrer que $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \vec{u} = k$ si, et seulement si, $\overrightarrow{KM} \cdot \vec{u} = 0$. En déduire que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \vec{u} = k$ est la droite passant par K et perpendiculaire à $\vec{u}$.
- 4.5** Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 12$. Que se passe-t-il lorsque $MA^2 - MB^2 = 0$?

Exercice 5 L'inégalité de Cauchy-Schwarz



(Hors programme — pour aller plus loin.)

- 5.1** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, avec $\vec{v} \neq \vec{0}$. Pour tout réel t , on pose $f(t) = \|\vec{u} + t\vec{v}\|^2$. Développer $f(t)$ et justifier que $f(t) \geq 0$ pour tout réel t . En utilisant le discriminant d'un trinôme du second degré, en déduire que $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$, c'est-à-dire $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$. Dans quel cas a-t-on égalité ?
- 5.2** En déduire l'inégalité triangulaire : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (on pourra comparer les carrés).
- 5.3** Soit x et y deux réels tels que $x^2 + y^2 = 1$. En utilisant les vecteurs $\vec{p}(3;4)$ et $\vec{q}(x;y)$ dans une base orthonormée, démontrer que $3x + 4y \leq 5$. Pour quelles valeurs de x et y a-t-on égalité ?
- 5.4** Démontrer que, pour tous réels a et b , $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, puis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$ pour tous réels a et b positifs.

Exercice 6 Centre de gravité et somme des carrés des distances



ABC est un triangle, I le milieu de $[BC]$ et G son centre de gravité, défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

- 6.1** Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (on pourra exprimer $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ à l'aide de $\overrightarrow{GI}$).
- 6.2** Démontrer que, pour tout point M du plan, $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$. En déduire le point M du plan pour lequel la somme $MA^2 + MB^2 + MC^2$ est minimale.
- 6.3** Application : trois hameaux sont situés, dans un repère orthonormé d'unité 1 km, en $A(0;0)$, $B(12;0)$ et $C(3;9)$. On veut construire un réservoir d'eau en un point M qui rend minimale la somme des carrés des distances aux trois hameaux. Déterminer ce point et la valeur minimale de la somme. Déterminer ensuite l'ensemble des points M pour lesquels cette somme vaut 207.