

Sujet type épreuve anticipée

Probabilités conditionnelles et indépendance

Partie 1 : douze questions d'automatismes — Partie 2 : une question délicate dans un sondage, les feux d'un trajet, le volume d'une boîte

Durée : 2 h · sans calculatrice · QCM et 3 exercices · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

L'usage de la calculatrice est interdit. Le sujet comporte deux parties indépendantes. **Partie 1** : pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie, sans justification. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. **Partie 2** : les réponses doivent être justifiées ; la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent dans l'appréciation des copies.

Partie 1 — Automatismes (6 points)

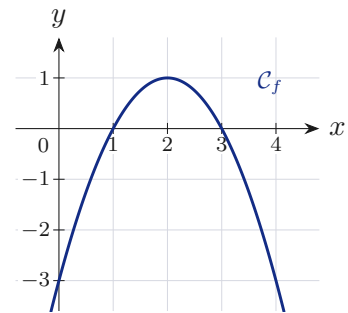
Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

6 pts ●○○○

- 1.1** Le nombre $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$ est égal à :
- a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{7}{12}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{12}$
- 1.2** Le nombre $(10^{-2})^3 \times 10^5$ est égal à :
- a) 10^{10} b) 10^0 c) 10^{-30} d) 10^{-1}
- 1.3** Pour tout réel x , l'expression $(x-1)(2x+3) - (x-1)^2$ est égale à :
- a) $(x-1)(x+4)$ b) $(x-1)(x+2)$ c) $(x-1)(3x+2)$ d) $(x-1)^2(2x+3)$
- 1.4** L'expression $5 - 2x$ est positive ou nulle si, et seulement si, x appartient à :
- a) $[\frac{5}{2}; +\infty[$ b) $] -\infty; -\frac{5}{2}]$ c) $] -\infty; \frac{5}{2}]$ d) $[-\frac{5}{2}; +\infty[$
- 1.5** Le nombre d'abonnés d'un journal baisse de 20 % par an pendant deux ans. Sur les deux années, il a baissé de :
- a) 40 % b) 36 % c) 64 % d) 20 %
- 1.6** Dans une série statistique de 40 valeurs, la valeur 5 a pour fréquence 15 %. Son effectif est :
- a) 6 b) 15 c) 0,15 d) 4
- 1.7** Dans un repère, les droites d'équations $y = 3x - 1$ et $y = -x + 7$ se coupent au point de coordonnées :
- a) (5 ; 2) b) (-2 ; -7) c) (2 ; 5) d) (1 ; 2)

1.8 La courbe ci-contre est celle d'une fonction polynôme du second degré f . Pour tout réel x , $f(x)$ est égal à :

- a) $x^2 - 4x + 3$ b) $-x^2 - 4x - 3$
 c) $-x^2 + 4x + 3$ d) $-x^2 + 4x - 3$

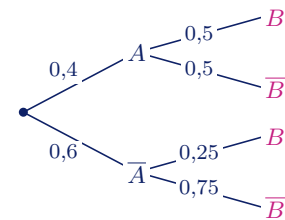


1.9 (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2. Le terme u_4 est égal à :

- a) 48 b) 24 c) 11 d) 96

1.10 On considère l'arbre pondéré ci-contre. La probabilité $P_B(A)$ est égale à :

- a) 0,5 b) 0,2 c) $\frac{4}{7}$ d) 0,35



1.11 Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires, indiscernables au toucher. On tire une boule, on la remet dans l'urne, puis on en tire une seconde. La probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est :

- a) $\frac{6}{25}$ b) $\frac{12}{25}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{4}{25}$

1.12 A et B sont deux événements indépendants tels que $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,5$. La probabilité $P(A \cup B)$ est égale à :

- a) 0,8 b) 0,15 c) 0,35 d) 0,65

Partie 2 — Exercices (14 points)

Exercice 2 Une question délicate dans un sondage

5 pts ●●○

Pour savoir quelle proportion p des élèves d'un grand lycée a déjà copié sur un voisin pendant un devoir, sans que personne ne puisse être mis en cause, on utilise la méthode de la « réponse aléatoire ». Chaque élève interrogé lance en secret un dé équilibré à six faces :

- s'il obtient 1 ou 2, il répond « oui », quelle que soit la vérité ;
- s'il obtient 3, 4, 5 ou 6, il répond sincèrement à la question « Avez-vous déjà copié sur un voisin ? ».

On choisit un élève interrogé au hasard. On note C l'événement « l'élève a déjà copié », D l'événement « le dé donne 1 ou 2 » et O l'événement « l'élève répond oui ». Les événements C et D sont indépendants et $P(C) = p$.

Partie A — Un cas particulier : $p = 0,3$

2.1 Construire un arbre pondéré dont le premier niveau porte sur C et le second sur D , puis indiquer au bout de chaque chemin si l'élève répond « oui » ou « non ».

2.2 Démontrer que $P(O) = \frac{8}{15}$.

2.3 Un élève a répondu « oui ». Démontrer que la probabilité qu'il ait déjà copié est égale à $\frac{9}{16}$. Que vaut la probabilité qu'un élève ayant répondu « non » ait déjà copié ? Expliquer pourquoi les élèves peuvent répondre « oui » sans crainte.

Partie B — Estimer la proportion inconnue p

2.4 Démontrer que, dans le cas général, $P(O) = \frac{1+2p}{3}$.

2.5 Dans un sondage réalisé auprès de 1 000 élèves, 520 ont répondu « oui ». En assimilant la fréquence observée à $P(O)$, en déduire une estimation de p .

2.6 Pour quelles valeurs de p les événements C et O sont-ils indépendants ?

Exercice 3 Les feux d'un trajet

4 pts ●●○

Pour se rendre à son club, Nadia traverse à vélo quatre carrefours équipés de feux tricolores. On admet que chaque feu est rouge à son passage avec la probabilité $\frac{1}{3}$, indépendamment des autres feux. On note R l'événement « le feu est rouge ».

- 3.1 Décrire l'arbre pondéré associé à ce trajet : combien comporte-t-il de niveaux, de chemins ? Calculer la probabilité que Nadia ne rencontre aucun feu rouge.
- 3.2 Combien de chemins comportent exactement un feu rouge ? En déduire la probabilité que Nadia rencontre exactement un feu rouge.
- 3.3 Calculer la probabilité que Nadia rencontre au moins un feu rouge, puis celle qu'elle en rencontre au plus un.
- 3.4 Un jour, Nadia a rencontré au moins un feu rouge. Quelle est la probabilité qu'elle n'en ait rencontré qu'un seul ?
- 3.5 On note R_1 l'événement « le premier feu est rouge » et E l'événement « Nadia rencontre exactement un feu rouge ». Calculer $P(R_1 \cap E)$. Les événements R_1 et E sont-ils indépendants ?

Exercice 4 Le volume d'une boîte

5 pts ●●○

Dans une plaque carrée de carton de 12 cm de côté, on découpe aux quatre coins un carré de côté x centimètres, avec $0 < x < 6$, puis on replie les bords pour obtenir une boîte sans couvercle (figure 1). On note $V(x)$ le volume de la boîte, en cm^3 .

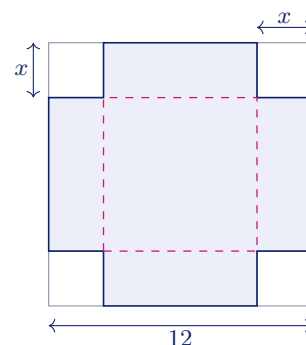


Figure 1 — Le patron (plis en pointillés)

- 4.1 Justifier que $V(x) = x(12 - 2x)^2$. En déduire que $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ pour tout x de $]0 ; 6[$.
- 4.2 Démontrer que, pour tout réel x de $]0 ; 6[$, on a $V'(x) = 12(x - 2)(x - 6)$.
- 4.3 Dresser le tableau de variations de V sur $]0 ; 6[$. Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ? Préciser ce volume maximal et les dimensions de la boîte correspondante.
- 4.4 Calculer $V(3)$. On cherche s'il existe une autre découpe donnant le même volume.
 - a) Démontrer que l'équation $V(x) = 108$ équivaut à $x^3 - 12x^2 + 36x - 27 = 0$, puis vérifier que, pour tout réel x , $x^3 - 12x^2 + 36x - 27 = (x - 3)(x^2 - 9x + 9)$.
 - b) En déduire la valeur exacte de l'autre découpe x de l'intervalle $]0 ; 6[$ donnant un volume de 108 cm^3 . Justifier, sans calculatrice, que cette valeur est comprise entre 1 et 1,5.