

Fiche de cours

Probabilités conditionnelles et indépendance

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur

1 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Définition. Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. La **probabilité de B sachant A** est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Propriété. Pour tous événements A et B tels que $P(A) \neq 0$:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B), \quad 0 \leq P_A(B) \leq 1, \quad P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B).$$

Remarque. En situation d'équiprobabilité, $P_A(B)$ est la proportion des issues de B parmi celles de A : on « se restreint » à A , qui devient le nouvel univers. Dans un **tableau croisé**, $P_A(B)$ se lit en divisant l'effectif de la case $A \cap B$ par le total de la ligne (ou de la colonne) A .

Méthode — traduire un énoncé. « parmi les A , la proportion de B », « sachant que », « lorsque A est réalisé » $\rightarrow P_A(B)$. « A et B » $\rightarrow P(A \cap B)$. Attention au sens du conditionnement : $P_A(B)$ et $P_B(A)$ n'ont aucune raison d'être égales.

2 ARBRES PONDÉRÉS ET PROBABILITÉS TOTALES

Propriété — les trois règles de l'arbre. Dans un arbre pondéré :

- la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 ;
- la probabilité d'un **chemin** est le *produit* des probabilités des branches qui le composent ;
- la probabilité d'un événement est la *somme* des probabilités des chemins qui y mènent.

Les branches du premier niveau portent $P(A)$ et $P(\overline{A})$; celles du second niveau portent des probabilités *conditionnelles*, $P_A(B)$ ou $P_{\overline{A}}(B)$.

Définition. Des événements $A_1, \dots, A_n$ de probabilités non nulles forment une **partition de l'univers** lorsqu'ils sont deux à deux incompatibles et que leur réunion est l'univers. Le cas le plus fréquent est la partition $\{A; \overline{A}\}$.

Théorème — formule des probabilités totales. Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers, alors, pour tout événement B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B).$$

En particulier : $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$.

Méthode — « renverser » un conditionnement. Pour calculer $P_B(A)$ alors que l'arbre donne $P_A(B)$: écrire $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, calculer le numérateur par le chemin correspondant et le dénominateur par les probabilités totales.

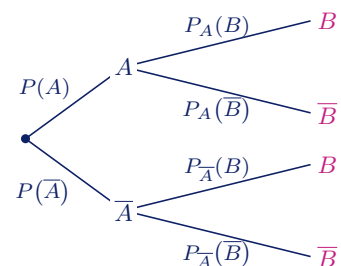


Figure 1 — Arbre pondéré : le chemin du haut a pour probabilité $P(A) \times P_A(B) = P(A \cap B)$.

3 INDÉPENDANCE

Définition. Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété. Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B . Si A et B sont indépendants, il en est de même de A et $\overline{B}$, de $\overline{A}$ et B , de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Remarque. Ne pas confondre **incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$) et **indépendants**. L'indépendance se *démontre* par un calcul, ou se justifie par la situation (tirages avec remise, lancers successifs, personnes choisies indépendamment).

Remarque. Algorithme du chapitre : la **méthode de Monte-Carlo** estime une probabilité, ou une aire, en simulant un grand nombre d'expériences aléatoires et en calculant la fréquence des succès observés.

4 RÉPÉTITION D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES

Définition. Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience à deux issues : le succès S , de probabilité p , et l'échec $\bar{S}$, de probabilité $1 - p$.

Propriété. On répète n fois ($n \leq 4$) la même épreuve de Bernoulli, de façon indépendante : on représente la situation par un arbre à n niveaux, qui compte 2^n chemins. La probabilité d'un chemin comportant k succès et $n - k$ échecs est

$$p^k(1 - p)^{n-k}.$$

Méthode — probabilité d'obtenir k succès. Dénombrer les chemins de l'arbre qui comportent exactement k succès, puis multiplier ce nombre par $p^k(1 - p)^{n-k}$, puisque tous ces chemins ont la même probabilité.

Remarque. Plus généralement, lors d'une succession d'épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue est le *produit* des probabilités des résultats qui la composent.

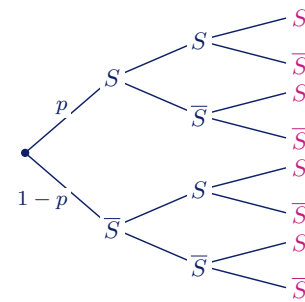


Figure 2 — $n = 3$: 8 chemins, dont 3 comportent exactement 2 succès.

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Calculer une probabilité conditionnelle à partir de la définition ou d'un tableau croisé; distinguer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
- Construire et compléter un arbre pondéré; calculer la probabilité d'un chemin, puis d'un événement.
- Appliquer la formule des probabilités totales, puis « renverser » un conditionnement (tests de dépistage, faux positifs).
- Démontrer que deux événements sont indépendants, ou justifier qu'ils ne le sont pas.
- Calculer des probabilités lors de la répétition de $n \leq 4$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, en dénombrant les chemins de l'arbre.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — probabilités totales et conditionnement renversé

Un test de dépistage : 2 % de la population est malade (M); le test est positif (T) pour 95 % des malades et pour 3 % des non-malades. Alors $P(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,03 = 0,019 + 0,0294 = 0,0484$, puis $P_T(M) = \frac{0,019}{0,0484} \approx 0,393$: moins de 40 % des tests positifs concernent un malade, alors que $P_M(T) = 0,95$.

★ EXEMPLE — indépendance

On lance deux dés équilibrés. Soit A : « le premier dé donne 6 » et B : « la somme vaut 7 ». Alors $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ et $A \cap B$ est l'issue (6 ; 1), donc $P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A) \times P(B)$: A et B sont indépendants.

★ EXEMPLE — épreuves répétées

Un joueur marque un panier avec la probabilité $p = 0,8$ et tire 3 fois, de façon indépendante. La probabilité de marquer exactement 2 paniers est $3 \times 0,8^2 \times 0,2 = 0,384$ (3 chemins), et celle d'en marquer au moins un est $1 - 0,2^3 = 0,992$.

✗ PIÈGES

- $P_A(B)$ et $P_B(A)$ sont deux nombres différents : le mot « sachant » indique la condition, donc le dénominateur.
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ *seulement* si A et B sont indépendants; en général, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
- Incompatibles et indépendants ne veulent pas dire la même chose : deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.
- Sur un arbre, les probabilités du deuxième niveau sont conditionnelles : on ne les additionne pas avec celles du premier, on les multiplie le long du chemin.
- Pour n épreuves répétées, ne pas oublier de *compter les chemins* : la probabilité d'obtenir k succès n'est pas $p^k(1 - p)^{n-k}$ mais ce produit multiplié par le nombre de chemins.