

# Exercices 1

## Probabilités conditionnelles et indépendance

Les bases : tableau croisé, probabilité conditionnelle, arbre pondéré, probabilités totales, indépendance, épreuves répétées

6 exercices · niveau ●○○ à ●●○ · durée conseillée : 2 h · sans calculatrice

### ★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Calculer une probabilité conditionnelle à partir de sa définition ou d'un tableau croisé ; traduire « parmi », « sachant que » ; ne pas confondre  $P(A \cap B)$ ,  $P_A(B)$  et  $P_B(A)$ .
- Construire, compléter et exploiter un arbre pondéré ; utiliser la formule des probabilités totales. Reconnaître ou justifier l'indépendance de deux événements ; calculer des probabilités lors d'épreuves indépendantes successives, en dénombrant les chemins d'un arbre.

### ■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- **Probabilité conditionnelle.** Si  $P(A) \neq 0$ ,  $P_A(B) = P(A \cap B)/P(A)$  («  $B$  sachant  $A$  ») ;  $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$  ;  $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$ . En cas d'équiprobabilité,  $P_A(B)$  est la proportion des issues de  $B$  parmi celles de  $A$ .
- **Arbre pondéré.** Les branches issues d'un même nœud ont des probabilités de somme 1 ; un chemin a pour probabilité le *produit* des probabilités de ses branches ; un événement a pour probabilité la *somme* des probabilités des chemins qui y mènent.
- **Probabilités totales.** Si  $A_1, \dots, A_n$  forment une partition de l'univers (de probabilités non nulles) :  $P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B)$  ; en particulier  $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ .
- **Indépendance.**  $A$  et  $B$  sont indépendants si  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$  ; si  $P(A) \neq 0$ , cela équivaut à  $P_A(B) = P(B)$ .
- **Épreuves indépendantes.** La probabilité d'une issue est le produit des probabilités de ses résultats. En répétant  $n$  fois une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ , un chemin comportant  $k$  succès a pour probabilité  $p^k(1-p)^{n-k}$  : on compte les chemins favorables.

## Exercice 1 Lire un sondage dans un tableau croisé

●○○

Avant une élection opposant Xavier et Yasmina, un institut interroge 800 électeurs ; leurs intentions de vote sont réparties selon l'âge dans le tableau ci-contre. On choisit au hasard une personne interrogée ; on note  $J$ ,  $M$ ,  $S$  les événements indiqués,  $X$  : « elle vote Xavier » et  $Y$  : « elle vote Yasmina ».

|                      | $X$ | $Y$ | Total |
|----------------------|-----|-----|-------|
| $J$ : 18 à 34 ans    | 90  | 110 | 200   |
| $M$ : 35 à 59 ans    | 180 | 140 | 320   |
| $S$ : 60 ans et plus | 170 | 110 | 280   |
| Total                | 440 | 360 | 800   |

- 1.1 Calculer  $P(J)$ ,  $P(X)$  et  $P(J \cap X)$ , sous forme de fractions irréductibles.
- 1.2 Calculer  $P_J(X)$  et  $P_X(J)$ . Traduire chacune par une phrase commençant par « Parmi ... » et expliquer pourquoi elles diffèrent.
- 1.3 Noter puis calculer la probabilité que la personne ait 60 ans ou plus sachant qu'elle vote pour Yasmina, et la probabilité qu'une personne de 35 à 59 ans vote pour Yasmina.

## Exercice 2 Traduire un énoncé

●○○

Dans une station de montagne, on choisit au hasard un jour de l'hiver ; on note  $N$  : « il neige » et  $T$  : « le téléphérique fonctionne ». On sait que : **(a)** il neige un jour sur quatre ; **(b)** les jours où il neige, le téléphérique fonctionne dans 60 % des cas ; **(c)** 40 % des jours où le téléphérique ne fonctionne pas sont des jours de neige ; **(d)** il neige et le téléphérique fonctionne pendant 15 % des jours.

- 2.1** Traduire chacune des quatre informations par une égalité, avec les notations  $P(\dots)$ ,  $P_{\dots}(\dots)$  et  $\cap$ . Vérifier que (d) se déduit de (a) et (b).
- 2.2** Calculer  $P(N \cap \overline{T})$ , puis  $P(\overline{T})$ . Un jour où le téléphérique fonctionne, quelle est la probabilité qu'il neige ?

## Exercice 3 Compléter et exploiter un arbre

●○○

$A$  et  $B$  sont deux événements d'une expérience aléatoire. L'arbre pondéré de la figure 1 est incomplet.

- 3.1** Recopier et compléter l'arbre.
- 3.2** Calculer  $P(A \cap B)$  et  $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ .
- 3.3** Justifier que  $P(B) = 0,32$ , puis calculer  $P_B(A)$  sous forme de fraction irréductible. Est-elle égale à  $P_A(B)$  ?

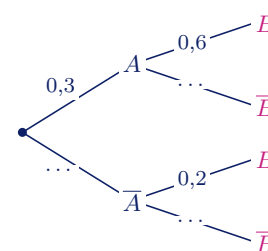


Figure 1 — Un arbre à compléter

## Exercice 4 Les probabilités totales : le trajet de Léa

●●○

Pour aller au lycée, Léa prend son vélo avec la probabilité 0,6, le bus avec la probabilité 0,3 et, sinon, la voiture. Elle arrive en retard avec la probabilité 0,05 à vélo, 0,2 en bus et 0,1 en voiture. Un jour de classe pris au hasard, on note  $V$ ,  $B$ ,  $C$  les événements « Léa vient à vélo », « ... en bus », « ... en voiture » et  $R$  : « elle est en retard ».

- 4.1** Construire un arbre pondéré. Pourquoi  $V$ ,  $B$  et  $C$  forment-ils une partition de l'univers ? Démontrer que  $P(R) = 0,1$ .
- 4.2** Un jour, Léa arrive en retard. Calculer la probabilité qu'elle soit venue en bus, puis à vélo, puis en voiture. Quel est le moyen de transport le plus probable ? Calculer enfin  $P_{\overline{R}}(V)$  (fraction irréductible).

## Exercice 5 Indépendants ou non ?

●●○

- 5.1** Le tableau ci-contre répartit les 400 élèves d'un lycée selon qu'ils font du sport en club ( $S$ ) et portent des lunettes ( $L$ ). On choisit un élève au hasard. Démontrer que  $S$  et  $L$  sont indépendants ; comparer  $P_S(L)$  et  $P(L)$ .

|                | $L$ | $\overline{L}$ | Total |
|----------------|-----|----------------|-------|
| $S$            | 60  | 180            | 240   |
| $\overline{S}$ | 40  | 120            | 160   |
| Total          | 100 | 300            | 400   |

- 5.2** Deux événements  $A$  et  $B$  vérifient  $P(A) = 0,4$ ,  $P(B) = 0,5$  et  $P(A \cap B) = 0,2$  : sont-ils indépendants ? Les événements  $E$  et  $F$  sont indépendants,  $P(E) = 0,3$ ,  $P(E \cap F) = 0,12$  : calculer  $P(F)$  et  $P_F(E)$ .

## Exercice 6 Répondre au hasard à un QCM

●●○

Un QCM comporte trois questions ; pour chacune, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Un élève répond au hasard, indépendamment d'une question à l'autre ; on note  $S$  le succès « la réponse est exacte ».

- 6.1** Construire l'arbre pondéré des trois réponses. Calculer la probabilité que les trois réponses soient exactes, puis celle qu'aucune ne le soit.
- 6.2** Combien de chemins comportent exactement une réponse exacte ? En déduire la probabilité correspondante. Même question pour deux réponses exactes. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux réponses exactes.
- 6.3** Avec quatre questions, énumérer les chemins comportant exactement deux succès (par exemple  $SS\overline{S}\overline{S}$ ) et calculer la probabilité d'obtenir exactement deux réponses exactes.