

Exercices 2

Probabilités conditionnelles et indépendance

Application : dépistage médical, contrôle qualité, génétique, tirs au but, méthode de Monte-Carlo

5 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Modéliser une situation par un arbre pondéré ou un tableau, passer de l'un à l'autre, utiliser les probabilités totales; distinguer $P_A(B)$ et $P_B(A)$ (faux positifs, valeur prédictive d'un test).
- Exploiter l'indépendance d'épreuves successives; dénombrer les chemins d'un arbre; compléter et interpréter un programme Python de simulation (méthode de Monte-Carlo).

Exercice 1 Un test de dépistage

●●○

Une maladie touche 2 % d'une population. Un test de dépistage est positif chez 95 % des personnes malades et chez 3 % des personnes non malades (ce sont des « faux positifs »). On choisit une personne au hasard; on note M : « elle est malade » et T : « son test est positif ».

- 1.1 Construire un arbre pondéré. Démontrer que $P(T) = 0,0484$.
- 1.2 La personne a un test positif. Calculer la probabilité qu'elle soit malade (*valeur prédictive positive* du test), arrondie à 10^{-3} . Commenter ce résultat surprenant.
- 1.3 Calculer $P(M \cap \bar{T})$ (« faux négatif ») et la probabilité qu'une personne au test négatif soit malade, arrondie à 10^{-4} .
- 1.4 Pour mieux comprendre, dresser le tableau croisé des effectifs attendus dans un groupe de 10 000 personnes (lignes $M, \bar{M}$; colonnes $T, \bar{T}$), puis retrouver le résultat de la question 1.2.
- 1.5 On utilise le même test chez des personnes présentant des symptômes, parmi lesquelles 20 % sont malades. Que devient la valeur prédictive positive ? Pourquoi réserve-t-on souvent les tests aux personnes « à risque » ?

Exercice 2 Contrôle qualité : deux machines

●●○

Une usine fabrique chaque jour 5 000 pièces sur deux machines M_1 et M_2 . Le tableau incomplet ci-contre donne la répartition des pièces d'une journée selon la machine et selon qu'elles sont défectueuses (D) ou non. On prélève une pièce au hasard.

	D	$\bar{D}$	Total
M_1	45		3 000
M_2		1 920	
Total	125		5 000

- 2.1 Compléter le tableau. Construire l'arbre pondéré commençant par M_1, M_2 , puis l'arbre commençant par $D, \bar{D}$ (probabilités arrondies à 10^{-3} si nécessaire).
- 2.2 Sur quel arbre lit-on directement la proportion de pièces défectueuses parmi celles produites par M_2 ? la proportion de pièces venant de M_2 parmi les pièces défectueuses ? Donner ces deux proportions.
- 2.3 Après un réglage, M_2 produit une proportion x de pièces défectueuses; la répartition de la production entre M_1 et M_2 est inchangée. Exprimer $P(D)$ en fonction de x . Quelle valeur de x donnerait $P(D) = 0,018$? Pour quelle valeur de x les événements D et M_1 seraient-ils indépendants ? Interpréter.

Exercice 3 Génétique : la couleur des petits pois



Chez le petit pois, la couleur des graines dépend d'un gène à deux allèles : J (jaune, dominant) et v (vert, récessif). Une plante de génotype JJ ou Jv a des graines jaunes ; une plante vv a des graines vertes. On croise deux plantes de génotype Jv : chaque parent transmet à un descendant l'un de ses deux allèles, avec la même probabilité, indépendamment de l'autre parent.

- 3.1 Dresser un tableau à double entrée (allèle transmis par le premier parent, allèle transmis par le second) donnant les issues et leurs probabilités. En déduire la probabilité de chaque génotype, puis la probabilité qu'un descendant ait des graines jaunes.
- 3.2 Un descendant a des graines jaunes. Quelle est la probabilité qu'il soit de génotype Jv ?
- 3.3 On croise un descendant à graines jaunes, choisi au hasard, avec une plante vv . À l'aide d'un arbre, calculer la probabilité que la nouvelle plante obtenue ait des graines vertes. Si elle a des graines jaunes, quelle est la probabilité que le parent jaune ait été de génotype JJ ?

Exercice 4 Tirs au but à l'entraînement



À l'entraînement, Inès tire quatre tirs au but ; elle marque à chaque tir avec la probabilité 0,75, indépendamment des autres tirs.

- 4.1 Justifier qu'il s'agit de la répétition de quatre épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Combien l'arbre correspondant compte-t-il de chemins ?
- 4.2 Calculer la probabilité qu'Inès marque quatre fois, puis qu'elle ne marque aucun but.
- 4.3 En dénombrant les chemins, calculer la probabilité qu'elle marque exactement trois buts, puis exactement deux buts. En déduire la probabilité qu'elle marque au moins trois buts.
- 4.4 Hugo marque avec la probabilité 0,9 à chaque tir. Calculer la probabilité qu'il marque au moins trois buts sur quatre tirs et comparer avec Inès.

Exercice 5 Méthode de Monte-Carlo : l'aire sous une parabole



Dans un repère orthonormé, on cherche l'aire $\mathcal{A}$ du domaine situé sous la parabole d'équation $y = x^2$, au-dessus de l'axe des abscisses, pour $x \in [0; 1]$. On choisit un point $M(x; y)$ au hasard dans le carré $[0; 1] \times [0; 1]$; on admet que la probabilité que M soit sous la parabole est égale à $\mathcal{A}$.

- 5.1 À quelle condition sur x et y le point M est-il sous la parabole ? Compléter la ligne 6 de la fonction ci-dessous pour qu'elle renvoie la fréquence des points situés sous la parabole parmi n points choisis au hasard.
- 5.2 La figure 1 montre 200 points choisis au hasard ; 67 d'entre eux (en magenta) sont sous la parabole. En déduire une estimation de $\mathcal{A}$.

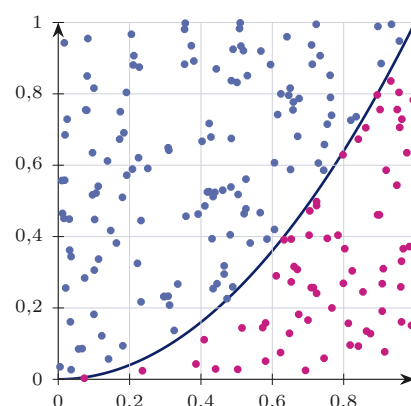


Figure 1 — 200 points et la parabole

```
1 from random import random
2 def estimation(n):
3     compteur = 0
4     for i in range(n):
5         x, y = random(), random()
6         if ..... :
7             compteur = compteur + 1
8     return compteur / n
```

- 5.3 Trois appels de estimation(100000) ont renvoyé 0,3336 ; 0,3329 et 0,3341. Quelle valeur exacte de $\mathcal{A}$ peut-on conjecturer ?
- 5.4 Comment modifier la fonction pour estimer l'aire du domaine situé sous la courbe de la fonction cube sur $[0; 1]$? Même question pour le domaine compris entre la parabole et la droite d'équation $y = x$.