

Contrôle A

Probabilités conditionnelles et indépendance

QCM, tableau croisé d'un sondage, arbre pondéré d'un filtre anti-spam, épreuves répétées

Durée : 1 h · sans calculatrice · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

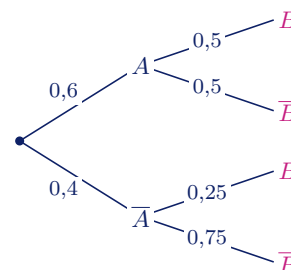
La calculatrice n'est pas autorisée. Les réponses du QCM ne demandent aucune justification ; dans les autres exercices, tout résultat doit être justifié. Les probabilités sont données sous forme décimale ou de fraction irréductible. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●○○○

Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 1.1** A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,2$. Alors $P_A(B)$ est égale à :
 a) 0,1 b) 0,4 c) 0,7 d) 2,5
- 1.2** Dans un club, 30 % des adhérents sont mineurs et, parmi eux, 40 % font de la compétition. La proportion des adhérents du club qui sont mineurs et font de la compétition est :
 a) 0,12 b) 0,7 c) 0,4 d) 0,75
- 1.3** A et B sont deux événements indépendants tels que $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,5$. Alors $P(A \cap B)$ est égale à :
 a) 0,7 b) 0,6 c) 0,1 d) 0,4
- 1.4** On considère l'arbre pondéré ci-contre. La probabilité $P(B)$ est égale à :
 a) 0,75 b) 0,3 c) 0,1 d) 0,4
- 1.5** On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir exactement une fois « face » est :
 a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$



Exercice 2 Un sondage avant une élection municipale

5 pts ●○○○

Avant une élection municipale, un institut interroge 1 000 habitants d'une ville, qui habitent soit le centre-ville (C), soit la périphérie ($\bar{C}$). Chacun déclare voter pour la liste Lebrun (L), voter pour une autre liste (O) ou s'abstenir (A). Le tableau suivant, incomplet, résume les réponses.

	Lebrun (L)	Autre (O)	Abstention (A)	Total
Centre-ville (C)	180		70	400
Périphérie ($\bar{C}$)		270		
Total	390		190	1 000

On choisit au hasard l'une des personnes interrogées.

- 2.1 Recopier et compléter le tableau. Calculer $P(C)$, $P(L)$ et $P(C \cap L)$.
- 2.2 Calculer $P_C(L)$ et $P_L(C)$, puis traduire chacune de ces probabilités par une phrase.
- 2.3 Quelle est la proportion d'habitants de la périphérie parmi les personnes qui déclarent s'abstenir ? Écrire cette probabilité avec les notations du cours.
- 2.4 Les événements C et L sont-ils indépendants ? Justifier.
- 2.5 L'institut ne retient que les personnes qui déclarent aller voter. Parmi elles, quelle est la proportion d'électeurs de la liste Lebrun ? D'après ce sondage, la liste Lebrun obtiendrait-elle la majorité absolue des suffrages exprimés ?

Exercice 3 Un filtre anti-spam

6 pts ●●○

Une messagerie reçoit des courriels dont 40 % sont des spams (courriels indésirables). Un filtre place un courriel dans le dossier « Indésirables » : il y place 95 % des spams, mais aussi, par erreur, 5 % des courriels qui ne sont pas des spams. On choisit un courriel au hasard ; on note S l'événement « le courriel est un spam » et F l'événement « le filtre place le courriel dans les Indésirables ».

- 3.1 Traduire les données de l'énoncé par des probabilités, puis construire un arbre pondéré décrivant la situation.
- 3.2 Calculer $P(S \cap F)$, puis démontrer que $P(F) = 0,41$.
- 3.3 Un courriel se trouve dans le dossier « Indésirables ». Quelle est la probabilité que ce soit réellement un spam ? On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.
- 3.4 Un courriel est arrivé dans la boîte de réception (il n'a pas été placé dans les Indésirables). Calculer la probabilité que ce soit un spam.
- 3.5 Un courriel est « mal classé » lorsque c'est un spam non filtré ou un courriel normal placé dans les Indésirables. Calculer la probabilité qu'un courriel soit mal classé.
- 3.6 Les événements S et F sont-ils indépendants ? Que signifierait l'indépendance de S et F pour ce filtre ?

Exercice 4 Tir à l'arc

4 pts ●●○

Un archer débutant atteint le centre de la cible avec la probabilité 0,2 à chaque tir. Il tire trois flèches ; on admet que les tirs sont indépendants. On note C l'événement « la flèche atteint le centre ».

- 4.1 Construire l'arbre pondéré décrivant les trois tirs.
- 4.2 Calculer la probabilité que les trois flèches atteignent le centre, puis celle qu'aucune ne l'atteigne.
- 4.3 Combien de chemins de l'arbre comportent exactement un succès ? En déduire la probabilité qu'exactly une flèche atteigne le centre.
- 4.4 Calculer la probabilité qu'au moins une flèche atteigne le centre, puis celle qu'au moins deux flèches l'atteignent.
- 4.5 L'archer tire maintenant quatre flèches, toujours de façon indépendante. Combien de chemins de l'arbre correspondant comportent exactement deux succès ? En déduire la probabilité qu'exactly deux flèches sur quatre atteignent le centre.