

Approfondissement

Probabilités conditionnelles et indépendance

Pour aller plus loin : démonstrations sur l'indépendance, le problème du chevalier de Méré, le jeu de Monty Hall, dépistage en deux temps, météo et suites, estimation de π

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 3 h · calculatrice autorisée

Exercice 1 Démonstrations autour de l'indépendance

●●●

A et B sont deux événements d'un même univers.

- 1.1 On suppose $P(A) \neq 0$. Démontrer que A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_A(B) = P(B)$.
- 1.2 On suppose que A et B sont indépendants. En utilisant la partition $\{B; \overline{B}\}$ de l'univers, démontrer que $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$, c'est-à-dire que A et $\overline{B}$ sont indépendants. En déduire que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants, puis que $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})$.
- 1.3 Démontrer que si A et B sont à la fois incompatibles et indépendants, alors l'un d'eux est de probabilité nulle. Pour quelles valeurs de $P(A)$ l'événement A est-il indépendant de lui-même ?
- 1.4 Application : chacune des trois lampes d'un phare peut tomber en panne au cours d'une nuit, indépendamment des autres, avec les probabilités respectives 0,1, 0,2 et 0,25. On admet que le résultat de la question 1.2 s'étend à trois événements. Calculer la probabilité qu'au moins une lampe reste allumée toute la nuit.

Exercice 2 Le problème du chevalier de Méré

●●●

Au XVII^e siècle, le chevalier de Méré pariait qu'en lançant quatre fois un dé équilibré, il obtiendrait au moins un six. Il raisonnait ainsi : « à chaque lancer, j'ai une chance sur six ; en quatre lancers, j'ai donc $4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ de chances de gagner ».

- 2.1 Calculer la probabilité de n'obtenir aucun six en quatre lancers, puis la probabilité exacte de gagner le pari (fraction, puis arrondi à 10^{-3}). Le pari était-il favorable ? Montrer, avec un raisonnement semblable, que la règle du chevalier est absurde pour sept lancers.
- 2.2 (*Hors programme — pour aller plus loin.*) Il pariait aussi qu'en lançant 24 fois deux dés, il obtiendrait au moins un « double six ». En admettant que la règle du produit s'étend à 24 épreuves indépendantes, calculer la probabilité de gagner ce second pari, arrondie à 10^{-4} , puis le nombre minimal de lancers pour que ce pari devienne favorable.

Exercice 3 Le jeu de Monty Hall

●●●

Une voiture est cachée au hasard derrière l'une de trois portes ; les deux autres cachent une chèvre. Le candidat désigne la porte 1. Le présentateur, qui sait où est la voiture, ouvre une autre porte cachant une chèvre (au hasard s'il a le choix). Le candidat peut garder la porte 1 ou changer. On note V_k : « la voiture est derrière la porte k » et O_k : « le présentateur ouvre la porte k ».

- 3.1 Recopier et compléter l'arbre de la figure 1. Calculer $P(O_3)$.
- 3.2 Le présentateur a ouvert la porte 3. Calculer $P_{O_3}(V_1)$ et $P_{O_3}(V_2)$. Le candidat a-t-il intérêt à changer de porte ?
- 3.3 Expliquer sans calcul pourquoi la stratégie « toujours changer » gagne exactement lorsque le premier choix était mauvais, et retrouver ainsi la probabilité de gagner en changeant.

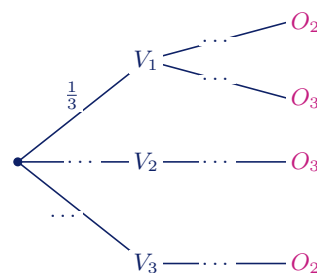


Figure 1 — L'arbre du jeu (à compléter)

- 3.4** Variante : le présentateur ne sait pas où est la voiture et ouvre au hasard la porte 2 ou la porte 3 (il peut donc révéler la voiture). Il ouvre la porte 3 et révèle une chèvre. Montrer qu'alors changer de porte ne change plus les chances de gagner.

Exercice 4 Dépistage en deux temps et simulation



Une maladie touche 1 % d'une population. Un test est positif chez 99 % des malades et chez 5 % des non-malades. Toute personne dont le test est positif passe un second test identique ; on admet que, pour une personne malade comme pour une personne non malade, les résultats des deux tests sont indépendants. On note M : « la personne est malade », T_1 et T_2 : « le premier (resp. second) test est positif ».

- 4.1** Démontrer que $P_{T_1}(M) = \frac{1}{6}$. Pourquoi ne peut-on pas annoncer un diagnostic après un seul test ?
- 4.2** Construire un arbre à trois niveaux (M, T_1, T_2) et démontrer que $P_{T_1 \cap T_2}(M) = \frac{99}{124}$; en donner un arrondi à 10^{-3} . En imaginant que toute la population passe les deux tests, les événements T_1 et T_2 sont-ils indépendants ?
- 4.3** Un troisième test est pratiqué après deux tests positifs. Calculer la probabilité d'être malade après trois tests positifs, arrondie à 10^{-3} .
- 4.4** Écrire une fonction Python `simulation(n)` qui simule n personnes (état de santé, puis deux tests) et renvoie la fréquence des malades parmi celles qui ont eu deux tests positifs. Quelle valeur doit-elle approcher ?

Exercice 5 La météo à long terme



Dans une ville, s'il pleut un jour, il pleut le lendemain avec la probabilité 0,6 ; s'il ne pleut pas, il pleut le lendemain avec la probabilité 0,2. Le jour 1, il pleut avec la probabilité 0,5. Pour tout entier $n \geq 1$, on note R_n l'événement « il pleut le jour n » et $p_n = P(R_n)$.

- 5.1** Construire l'arbre des trois premiers jours ; calculer p_2 et p_3 . Il pleut le jour 3 : quelle est la probabilité qu'il ait plu le jour 1 ? Les événements R_1 et R_3 sont-ils indépendants ?
- 5.2** À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$.
- 5.3** On pose $v_n = p_n - \frac{1}{3}$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, puis que $p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times 0,4^{n-1}$. Que peut-on dire de p_n lorsque n devient grand ? Interpréter.
- 5.4** À partir de quel jour la probabilité de pluie est-elle inférieure à 0,34 ?

Exercice 6 Méthode de Monte-Carlo : estimer π



On choisit au hasard un point $M(x; y)$ du carré $[0; 1] \times [0; 1]$ d'un repère orthonormé ; on admet que la probabilité que M soit dans une partie du carré est égale à l'aire de cette partie.

- 6.1** Quelle est l'aire du quart de disque de centre O et de rayon 1 contenu dans le carré ? À quelle condition sur x et y le point M lui appartient-il ?
- 6.2** Sur la figure 2, 157 des 200 points tirés au hasard (en magenta) sont dans le quart de disque. En déduire une estimation de π .
- 6.3** Écrire une fonction Python `estim_pi(n)` qui renvoie une estimation de π à partir de n points aléatoires. Trois appels avec $n = 100$ ont donné 3,24 ; 3,00 ; 3,16, et trois appels avec $n = 10^6$ ont donné 3,1409 ; 3,1422 ; 3,1417. Commenter.
- 6.4** Adapter la fonction pour tirer les points dans le carré $[-1; 1] \times [-1; 1]$ (on pourra utiliser `2*random()-1`) et compter ceux du disque de centre O et de rayon 1. Par quel nombre faut-il alors multiplier la fréquence obtenue pour estimer π ?

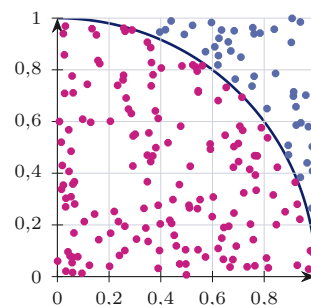


Figure 2 — 200 points et le quart de cercle