

Fiche de cours

Nombre dérivé et tangente

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

1 TAUX DE VARIATION ET SÉCANTES

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a, b deux réels distincts de I . Le **taux de variation** de f entre a et b est le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. En posant $b = a + h$ avec $h \neq 0$, il s'écrit

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Propriété. C'est le **coefficient directeur de la sécante** (AM) , où $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$ sont deux points de la courbe C_f . C'est aussi la **variation moyenne** de f sur l'intervalle considéré (par exemple une vitesse moyenne).

2 NOMBRE DÉRIVÉ

Définition. f est **dérivable en a** lorsque le taux de variation $\tau(h)$ tend vers un nombre réel ℓ quand h tend vers 0. Ce nombre est le **nombre dérivé** de f en a ; on le note $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Propriété — interprétations. $f'(a)$ est une **vitesse instantanée** si f décrit une position en fonction du temps, un **coût marginal** si f est un coût total en fonction de la quantité produite : c'est le taux de variation instantané de f en a .

Remarque. Une fonction n'est pas toujours dérivable : pour $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 0$, le taux vaut, pour $h > 0$, $\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$, qui devient aussi grand que l'on veut quand h tend vers 0 : la fonction racine carrée n'est **pas dérivable en 0** et sa courbe y admet une tangente verticale.

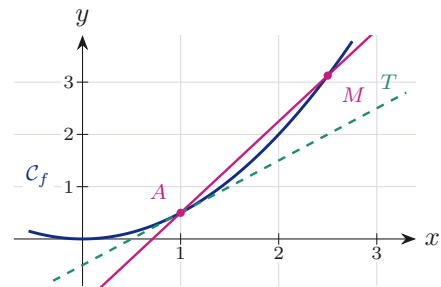


Figure 1 — La sécante (AM) et la tangente T en A . Quand M se rapproche de A , la sécante pivote et tend vers T .

3 TANGENTE À UNE COURBE

Définition. Lorsque f est dérivable en a , la **tangente** à C_f au point $A(a; f(a))$ est la position limite des sécantes (AM) lorsque M se rapproche de A : c'est la droite passant par A et de **coefficient directeur** $f'(a)$.

Théorème — équation de la tangente. Si f est dérivable en a , la tangente à C_f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Démonstration : cette droite a pour coefficient directeur $f'(a)$, donc une équation $y = f'(a)x + p$; elle passe par A , d'où $f(a) = f'(a)a + p$, soit $p = f(a) - af'(a)$.

Méthode — lire $f'(a)$ sur un graphique. repérer la tangente au point d'abscisse a et lire son coefficient directeur : en avançant de 1 vers la droite, on monte de $f'(a)$. Une **tangente horizontale** en A signifie $f'(a) = 0$.

4 APPROXIMATION AFFINE

Propriété. Si f est dérivable en a , alors, pour h **proche de 0** :

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

Au voisinage de a , on remplace la courbe par sa tangente : l'erreur commise est d'autant plus petite que $|h|$ est petit.

5 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Calculer un taux de variation entre deux réels et l'interpréter comme la pente d'une sécante ou comme une variation moyenne.
- Simplifier le taux de variation entre a et $a + h$, puis obtenir $f'(a)$ en faisant tendre h vers 0.
- Lire graphiquement un nombre dérivé; construire une tangente connaissant $f(a)$ et $f'(a)$.
- Déterminer une équation de la tangente en un point; retrouver $f(a)$ et $f'(a)$ à partir de son équation.
- Calculer une valeur approchée de $f(a + h)$ par approximation affine et estimer l'erreur.
- Interpréter $f'(a)$ dans un contexte : vitesse instantanée, coût marginal, débit.

6 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — nombre dérivé par le taux de variation

Soit $f(x) = x^2$ et a un réel. Pour $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h,$$

qui tend vers $2a$ quand h tend vers 0. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$; en particulier $f'(3) = 6$.

★ EXEMPLE — équation de tangente

Toujours pour $f(x) = x^2$, en $a = 3$: $f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$, donc la tangente a pour équation $y = 9 + 6(x - 3)$, soit $y = 6x - 9$. Réciproquement, si la tangente en -1 à la courbe de g a pour équation $y = 4x + 7$, alors $g'(-1) = 4$ et $g(-1) = 4 \times (-1) + 7 = 3$.

★ EXEMPLE — fonction inverse et approximation affine

Soit $k(x) = \frac{1}{x}$ et $a = 2$. Pour $h \neq 0$ et $h > -2$: $\frac{k(2+h) - k(2)}{h} = \frac{1}{h} \times \frac{2 - (2+h)}{2(2+h)} = \frac{-1}{2(2+h)}$, qui tend vers $-\frac{1}{4}$: $k'(2) = -\frac{1}{4}$. Tangente en 2 : $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 2)$. Approximation affine : $\frac{1}{2,1} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times 0,1 = 0,475$ (valeur exacte $\approx 0,4762$).

★ EXEMPLE — vitesse instantanée

La hauteur d'une balle, en mètres, est $z(t) = 20t - 5t^2$ (t en secondes). Entre 1 et $1 + h$ ($h \neq 0$) :

$$\frac{z(1+h) - z(1)}{h} = \frac{20(1+h) - 5(1+h)^2 - 15}{h} = \frac{10h - 5h^2}{h} = 10 - 5h,$$

qui tend vers 10. La vitesse instantanée à $t = 1$ s vaut donc $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Approximation affine : $z(1,1) \approx 15 + 10 \times 0,1 = 16 \text{ m}$ (valeur exacte 15,95 m).

✖ PIÈGES

- Le taux de variation n'est défini que pour $h \neq 0$: on *simplifie* d'abord par h , on fait tendre h vers 0 *ensuite*.
- $f'(a)$ est un **nombre**, pas une fonction, et $f(a)$ n'est pas $f'(a)$: dans l'équation de la tangente, les deux interviennent.
- L'équation de la tangente est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, et non $y = f(a) + f'(a)x$: ne pas oublier le $-a$.
- L'approximation affine n'est valable que pour h proche de 0 : elle donne une valeur approchée, jamais une valeur exacte.
- Une tangente peut couper la courbe : « tangente » ne veut pas dire « qui touche en un seul point ».