

Exercices 1

Nombre dérivé et tangente

Les bases : taux de variation, nombre dérivé, tangente, approximation affine

8 exercices · niveau ●○○ · durée conseillée : 1 h 30 · sans calculatrice

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Calculer un taux de variation et l'interpréter comme la pente d'une sécante.
- Obtenir un nombre dérivé comme limite d'un taux de variation ; le lire graphiquement.
- Tracer une tangente, en déterminer une équation ; utiliser l'approximation affine.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- Taux de variation de f entre a et $a + h$ ($h \neq 0$) : $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$; c'est le coefficient directeur de la sécante (AM) , où $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$.
- Si ce taux tend vers un nombre réel ℓ quand h tend vers 0, on dit que f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$ (nombre dérivé de f en a).
- Tangente à $\mathcal{C}_f$ en A : droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$, d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
- Approximation affine : pour h proche de 0, $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.

Exercice 1 Calculer des taux de variation

●○○

Calculer le taux de variation de la fonction entre les deux nombres indiqués.

- a) $f(x) = x^2$, entre 1 et 4 b) $g(x) = 3x - 7$, entre -2 et 5 c) $k(x) = \frac{1}{x}$, entre 1 et 4
d) $m(x) = \sqrt{x}$, entre 4 et 9 e) $p(x) = x^3$, entre -1 et 2 f) $q(x) = x^2 - 4x$, entre 0 et 4

Exercice 2 Pentés de sécantes

●○○

La courbe $\mathcal{P}$ ci-contre représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$. Les points O , A , B et C sont sur $\mathcal{P}$.

- 2.1 Lire les coordonnées des points A , B et C , puis les vérifier par le calcul.
2.2 Calculer les coefficients directeurs des sécantes (OA) , (OB) , (AB) et (AC) .
2.3 Laquelle de ces sécantes est parallèle à l'axe des abscisses ? Pourquoi était-ce prévisible ?
2.4 Déterminer l'équation réduite de la droite (AC) .

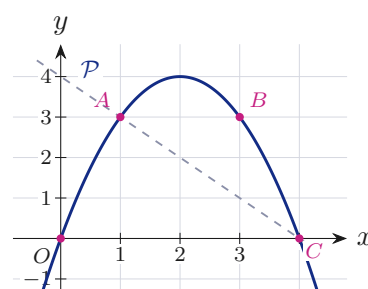


Figure 1 — Sécante (AC) en pointillés

Exercice 3 Du taux de variation au nombre dérivé

●○○

On considère la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

- 3.1 Montrer que, pour tout réel $h \neq 0$, $\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 6 + h$.
3.2 Calculer ce taux de variation pour $h = 1$, $h = 0,1$, $h = 0,01$ et $h = -0,01$. Vers quel nombre semble-t-il tendre ?

3.3 En déduire que f est dérivable en 3 et donner $f'(3)$. Par la même méthode, démontrer que $f'(-1) = -2$.

Exercice 4 Nombre dérivé par la limite

●●○

Simplifier le taux de variation de la fonction entre a et $a + h$ ($h \neq 0$), puis en déduire le nombre dérivé en a .

4.1 $g(x) = x^2 - 5x + 2$ et $a = 1$.

4.2 $k(x) = \frac{1}{x}$ et $a = 2$ (on suppose $h > -2$). On montrera que le taux de variation est égal à $-\frac{1}{2(2+h)}$.

4.3 $c(x) = x^3$ et $a = 1$. On admettra que $(1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$.

Exercice 5 Lecture graphique de nombres dérivés

●○○

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre représente une fonction f définie sur $[-3,5; 5,5]$. Les droites tracées en magenta sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points A, B, C et D d'abscisses respectives $-2, 0, 2$ et 4 .

5.1 Lire $f(-2), f(0), f(2)$ et $f(4)$.

5.2 Lire les nombres dérivés $f'(-2), f'(0), f'(2)$ et $f'(4)$. On expliquera la lecture pour $f'(0)$.

5.3 Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point B , puis au point D .

5.4 Combien de points de $\mathcal{C}_f$ ont une tangente parallèle à l'axe des abscisses?

5.5 Quel est le signe de $f'(1)$? de $f'(5)$? Justifier par la figure.

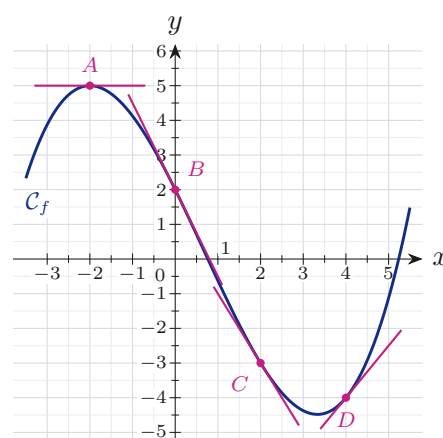


Figure 2 — Courbe $\mathcal{C}_f$ et quatre tangentes

Exercice 6 Construire des tangentes

●○○

Une fonction f définie sur $[-3; 5]$ vérifie : $f(-2) = 1$ et $f'(-2) = 2$; $f(0) = 3$ et $f'(0) = 0$; $f(2) = -1$ et $f'(2) = -1,5$; $f(4) = -2$ et $f'(4) = 0$. Dans un repère orthonormé (unité : 1 cm), placer les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses $-2, 0, 2$ et 4 , tracer les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en ces points (expliquer la construction de la tangente au point d'abscisse -2), puis tracer une courbe pouvant représenter f .

Exercice 7 Équations de tangentes

●●○

7.1 À l'aide de l'exercice 3, déterminer une équation de la tangente à la parabole $y = x^2$ aux points d'abscisses 3 et -1 .

7.2 La tangente à la courbe d'une fonction g au point d'abscisse -1 a pour équation $y = 4x + 7$. Donner $g(-1)$ et $g'(-1)$.

7.3 À l'aide de l'exercice 4, déterminer une équation de la tangente à l'hyperbole d'équation $y = 1/x$ au point d'abscisse 2. En quel point coupe-t-elle l'axe des abscisses?

Exercice 8 Approximation affine, sans calculatrice

●●○

8.1 Soit $f(x) = x^2$; on admet que $f'(1) = 2$. Justifier que $1,02^2 \approx 1,04$; calculer la valeur exacte et l'erreur commise.

8.2 Soit $g(x) = 1/x$; on admet que $g'(1) = -1$. Avec $0,98 = 1 + (-0,02)$, donner une valeur approchée de $1/0,98$.

8.3 Soit $r(x) = \sqrt{x}$; on admet que $r'(4) = 0,25$. Donner une valeur approchée de $\sqrt{4,01}$, puis calculer le carré de cette valeur approchée. Conclure.