

Exercices 2

Nombre dérivé et tangente

Application : sécantes, Python, coût marginal, vidange, tangentes d'une parabole

6 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée



R. RINGUET · 2026 – 2027

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Voir la tangente comme position limite des sécantes ; conjecturer un nombre dérivé (tableau, Python).
- Interpréter un nombre dérivé (coût marginal, débit) ; utiliser des tangentes dans un problème.

Exercice 1 La tangente, position limite des sécantes

●●○

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4}{x}$, de courbe $\mathcal{C}_f$, et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2. La figure 1 montre la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A et les sécantes (AM_1) , (AM_2) , (AM_3) , où M_1, M_2, M_3 sont les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses 4, 3 et 1.

1.1 Calculer les coefficients directeurs des trois sécantes.

1.2 Soit h un réel non nul, avec $h > -2$, et M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $2 + h$. Montrer que le coefficient directeur de la sécante (AM) est $-\frac{2}{2+h}$.

1.3 Calculer ce coefficient directeur pour $h = 0,5; 0,1; 0,01; -0,01$ et $-0,1$. Que constate-t-on lorsque h se rapproche de 0 ? Comment se déplace alors la sécante (AM) ?

1.4 Démontrer que $f'(2) = -1$, puis déterminer une équation de la tangente T . Montrer que T coupe les axes du repère en deux points P et Q dont A est le milieu.

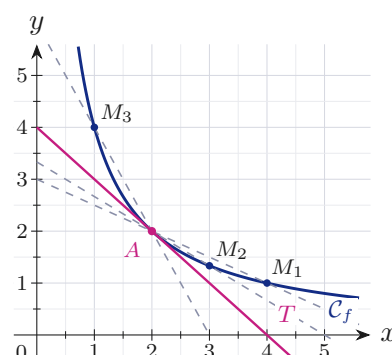


Figure 1 — Sécantes (pointillées) et tangente T

Exercice 2 Des pentes de sécantes en Python

●●○

On considère la fonction Python pentes ci-contre, où f est une fonction, a un nombre et n un entier naturel non nul.

2.1 Quelles valeurs prend successivement la variable h lors de l'appel `pentres(f, a, 4)` ? Que contient la liste renvoyée ? Interpréter géométriquement ses éléments.

```
1 from math import sqrt
2 def pentres(f, a, n):
3     L = []
4     h = 0.1
5     for k in range(n):
6         L.append((f(a + h) - f(a)) / h)
7         h = h / 10
8     return L
```

2.2 L'appel `pentres(sqrt, 1, 4)` renvoie une liste dont les valeurs, arrondies à 10^{-5} , sont 0,48809; 0,49876; 0,49988; 0,49999. Conjecturer le nombre dérivé en 1 de la fonction racine carrée, puis une équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1.

2.3 L'appel `pentres(sqrt, 0, 4)` renvoie les valeurs 3,16228; 10; 31,62278; 100. Que peut-on conjecturer ? Quelle allure a la courbe de la fonction racine carrée au voisinage de l'origine ?

2.4 Écrire une fonction Python cube renvoyant x^3 et l'appel de `pentres` utile pour conjecturer le nombre dérivé en 2 de la fonction cube. Démontrer cette conjecture.

Exercice 3 Le coût marginal



Dans un atelier, le coût de production de q vélos, en euros, est $C(q) = 0,5q^2 + 40q + 800$, où $q \in [0 ; 100]$.

- 3.1 Calculer $C(20)$, puis le coût de fabrication du 21^e vélo, c'est-à-dire $C(21) - C(20)$.
- 3.2 Montrer que, pour tout réel $h \neq 0$, $\frac{C(20+h) - C(20)}{h} = 60 + 0,5h$. En déduire $C'(20)$; comparer.
- 3.3 Le nombre $C'(q)$, appelé *coût marginal*, approche le coût de fabrication d'un vélo supplémentaire lorsque q vélos sont déjà produits. Montrer que $C'(q) = q + 40$. À partir de quelle production dépasse-t-il 100 euros ?
- 3.4 Un vélo est vendu 90 euros. Tant que le coût marginal est inférieur à ce prix, produire un vélo de plus augmente le bénéfice. Quelle production semble optimale ? Le vérifier avec le bénéfice $B(q) = 90q - C(q)$.

Exercice 4 La vidange d'une baignoire



On ouvre la bonde d'une baignoire pleine. Le volume d'eau restant, en litres, t minutes après l'ouverture est $V(t) = 0,5(t - 20)^2$ pour $t \in [0 ; 20]$ (figure 2). Le *débit* est le volume d'eau écoulé par unité de temps.

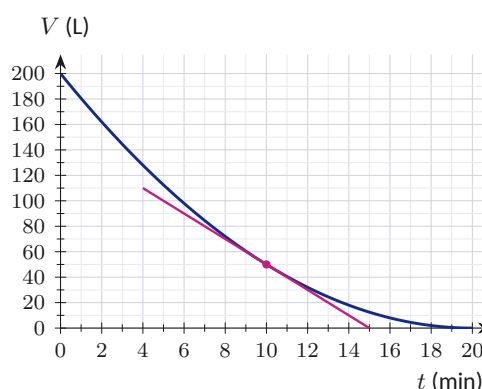


Figure 2 — Volume d'eau restant

- 4.1 Lire le volume initial et la durée de la vidange.
- 4.2 Calculer le débit moyen, en $L \cdot \text{min}^{-1}$, entre les instants $t = 0$ et $t = 10$.
- 4.3 La droite tracée est la tangente à la courbe au point d'abscisse 10. Lire son coefficient directeur. En déduire le débit instantané à l'instant $t = 10$.

- 4.4 Montrer que, pour $h \neq 0$, $\frac{V(t+h) - V(t)}{h} = t - 20 + \frac{h}{2}$, et en déduire que $V'(t) = t - 20$. Exprimer le débit instantané $D(t)$ à l'instant t en fonction de t . Quel est le débit à l'ouverture de la bonde ?
- 4.5 À quel instant le débit instantané est-il égal au débit moyen calculé à la question 4.2 ?

Exercice 5 Tangentes à une parabole passant par un point



Soit f la fonction carré, de courbe $\mathcal{P}$ dans un repère, et a un réel.

- 5.1 Montrer que $f'(a) = 2a$, puis que la tangente T_a à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a a pour équation $y = 2ax - a^2$.
- 5.2 Déterminer les réels a tels que T_a passe par $P(1 ; -3)$, et les équations de ces tangentes.
- 5.3 Démontrer qu'aucune tangente à $\mathcal{P}$ ne passe par $Q(1 ; 2)$. Où est situé Q par rapport à $\mathcal{P}$?

Exercice 6 Retrouver un trinôme grâce à ses tangentes



La parabole $\mathcal{P}$ ci-contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont des réels, $a \neq 0$. Les droites tracées sont les tangentes à $\mathcal{P}$ aux points E et F .

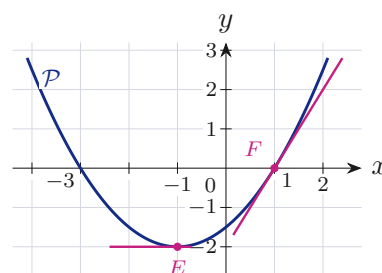


Figure 3 — Parabole et deux tangentes

- 6.1 Lire $f(-1)$, $f'(-1)$, $f(1)$ et $f'(1)$.
- 6.2 Soit x_0 un réel et $h \neq 0$. Montrer que le taux de variation de f entre x_0 et $x_0 + h$ est égal à $2ax_0 + b + ah$. En déduire $f'(x_0)$.
- 6.3 Déterminer a, b et c . Contrôler le résultat avec les racines lues sur la figure.
- 6.4 Déterminer le point de $\mathcal{P}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -x$.