

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 4

Contrôle B

 Nombre dérivé et tangente

Démonstration de l'équation de la tangente, racine carrée en 0 et en 4, tangentes à l'hyperbole, un module de skatepark

Durée : 1 h · sans calculatrice · 4 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

La calculatrice n'est pas autorisée. Tout résultat doit être justifié ; les nombres dérivés sont obtenus comme limites de taux de variation, sauf indication contraire. Les résultats sont donnés sous forme exacte. La qualité de la rédaction et la rigueur des démonstrations sont prises en compte dans la notation.

Exercice 1 Démonstration : équation de la tangente

4 pts ●●●○

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en un réel a de I , et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

- 1.1 Démonstration.** On rappelle que la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$. Justifier que T admet une équation de la forme $y = f'(a)x + p$, puis déterminer p . En déduire que T a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
- 1.2** On considère la fonction cube $c : x \mapsto x^3$. Vérifier que $(-1 + h)^3 = -1 + 3h - 3h^2 + h^3$ pour tout réel h , puis démontrer que $c'(-1) = 3$.
- 1.3** En déduire que la tangente à la courbe de la fonction cube au point d'abscisse -1 a pour équation $y = 3x + 2$.
- 1.4** Vérifier que, pour tout réel x , $x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$. En déduire les coordonnées des points communs à la courbe de la fonction cube et à cette tangente.

Exercice 2 La fonction racine carrée en 0 et en 4

5 pts ●●●●○

On note r la fonction racine carrée, définie sur $[0; +\infty[$ par $r(x) = \sqrt{x}$, et $\mathcal{C}_r$ sa courbe.

- 2.1 Démonstration.** Soit $h > 0$. Montrer que le taux de variation de r entre 0 et h est égal à $\frac{1}{\sqrt{h}}$. Que vaut ce taux pour $h = 10^{-6}$? pour $h = 10^{-10}$? Démontrer que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. Quelle est la tangente à $\mathcal{C}_r$ à l'origine ?
- 2.2** Soit h un réel non nul avec $h > -4$. En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{4+h} + 2$, montrer que $\frac{r(4+h) - r(4)}{h} = \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}$. En déduire $r'(4)$.
- 2.3** Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_r$ au point d'abscisse 4.
- 2.4** En déduire des valeurs approchées de $\sqrt{4,2}$ et de $\sqrt{3,96}$. Calculer le carré de chacune de ces valeurs approchées : sont-elles des valeurs approchées par excès ou par défaut ?
- 2.5** Démontrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $\frac{x}{4} + 1 - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{4}$. Quelle est la position de $\mathcal{C}_r$ par rapport à T ? Retrouver ainsi la conclusion de la question 2.4.

Exercice 3 Tangentes à l'hyperbole

5 pts ●●●○

Soit f la fonction inverse, définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, et $\mathcal{H}$ sa courbe dans un repère orthonormé d'origine O . Soit $a > 0$ et A le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse a .

- 3.1** Soit h un réel non nul tel que $a + h > 0$. Montrer que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$. En déduire $f'(a)$.
- 3.2** Montrer que la tangente T_a à $\mathcal{H}$ en A a pour équation $y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$.
- 3.3** La droite T_a coupe l'axe des abscisses en P et l'axe des ordonnées en Q . Déterminer les coordonnées de P et de Q . Montrer que A est le milieu du segment $[PQ]$ et que l'aire du triangle OPQ ne dépend pas de a .
- 3.4** Déterminer le point de $\mathcal{H}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -4x$, puis une équation de cette tangente.
- 3.5** Soit $E\left(1; \frac{3}{4}\right)$. Montrer que T_a passe par E si et seulement si $3a^2 - 8a + 4 = 0$. En déduire les équations des tangentes à $\mathcal{H}$ passant par E .

Exercice 4 Un module de skatepark

6 pts ●●●●

Le profil d'un module de skatepark est représenté ci-contre dans un repère d'unité le mètre. Il est formé :

- du sol, sur l'axe des abscisses, pour $x \leq 0$;
- d'un arc de parabole, courbe de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, pour $x \in [0; 4]$;
- d'un plan incliné rectiligne D , de pente $\frac{1}{2}$, qui part du point $B(4; 1)$.

Pour que le passage soit sans à-coup, on impose qu'en chaque point de raccordement, la courbe et la droite aient **le même point et la même tangente**.

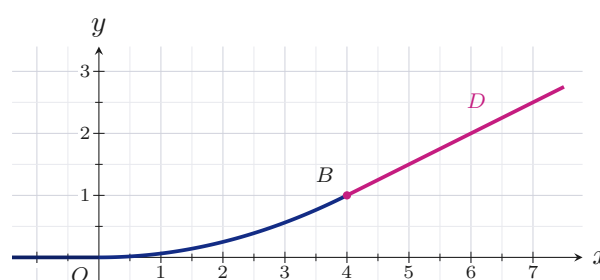


Figure 1 — Profil du module

- 4.1** Soit x_0 un réel. Démontrer que $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.
- 4.2** Traduire les conditions de raccordement au point O par deux égalités, et en déduire b et c .
- 4.3** Traduire les conditions de raccordement au point B , puis déterminer a . Les conditions sont-elles toutes compatibles ?
- 4.4** Déterminer une équation de la droite D . À quelle distance horizontale de O le plan incliné atteint-il 3 m de hauteur ?
- 4.5** Le constructeur souhaite un plan incliné de pente 1, toujours raccordé sans à-coup au sol par un arc de la forme $y = ax^2$ sur $[0; 4]$. Est-ce possible ? Si oui, à quelle hauteur se trouve le point de raccordement ?
- 4.6** Plus généralement, soit $L > 0$. Démontrer que la tangente à la parabole d'équation $y = ax^2$ au point d'abscisse L coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{L}{2}$. Retrouver ainsi rapidement le résultat de la question 4.5.