

Fiche de cours

Géométrie repérée

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

Dans toute la fiche, le plan est muni d'un repère **orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 VECTEUR NORMAL ET ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE DROITE

Définition. Un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ est **normal** à une droite d lorsqu'il est orthogonal à un vecteur directeur de d .

Propriété. La droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Théorème. Si $\vec{n}(a; b)$ est normal à d , alors d admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + c = 0$ (avec $(a; b) \neq (0; 0)$). Réciproquement, la droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet $\vec{n}(a; b)$ pour vecteur normal et $\vec{u}(-b; a)$ pour vecteur directeur.

Propriété. Si $b \neq 0$, l'équation $ax + by + c = 0$ équivaut à l'équation réduite $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$; si $b = 0$, la droite est parallèle à l'axe des ordonnées. Deux droites sont **parallèles** si, et seulement si, leurs vecteurs normaux sont colinéaires, et **perpendiculaires** si, et seulement si, leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Méthode — déterminer une équation cartésienne. Connaissant un point $A(x_A; y_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a; b)$: écrire $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$, c'est-à-dire $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$, puis développer. On peut aussi partir de $ax + by + c = 0$ et déterminer c en remplaçant x et y par les coordonnées de A .

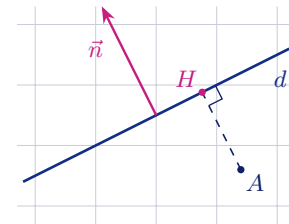


Figure 1 — H est le projeté orthogonal de A sur d : $\vec{AH}$ est colinéaire à $\vec{n}$ et $d(A, d) = AH$.

■ FORMULAIRE — Les droites classiques d'une configuration

- **Hauteur** issue de A dans le triangle ABC : droite passant par A et de vecteur normal $\vec{BC}$.
- **Médiatrice** de $[AB]$: droite passant par le milieu de $[AB]$ et de vecteur normal $\vec{AB}$; c'est l'ensemble des points M tels que $MA = MB$.
- **Tangente** au cercle de centre Ω en un point T du cercle : droite passant par T et de vecteur normal $\vec{\Omega T}$.

2 PROJETÉ ORTHOGONAL ET DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

Définition. Le **projeté orthogonal** d'un point A sur une droite d est l'unique point H de d tel que $\vec{AH}$ soit orthogonal à un vecteur directeur de d (autrement dit, colinéaire à un vecteur normal de d).

Propriété. H est le point de d le plus proche de A : pour tout point M de d , $AM \geq AH$. La **distance** du point A à la droite d est $d(A, d) = AH$.

Méthode — calculer les coordonnées de H . Écrire l'équation de la droite d' passant par A et de vecteur normal un vecteur directeur de d (c'est la perpendiculaire à d passant par A), puis résoudre le système formé par les équations de d et de d' . La distance $d(A, d)$ s'obtient ensuite en calculant la longueur AH .

3 CERCLES

Propriété. Le cercle de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\Omega M = r$, c'est-à-dire

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Propriété — cercle de diamètre $[AB]$. C'est l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$, ce qui s'écrit, avec les coordonnées, $(x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) = 0$. Son centre est le milieu de $[AB]$ et son rayon vaut $\frac{1}{2}AB$.

Méthode — reconnaître une équation de cercle. Devant une équation $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, regrouper les termes en x et ceux en y , puis **compléter les carrés** : $x^2 + \alpha x = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}$. On obtient $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k$: c'est un cercle si $k > 0$, un point si $k = 0$, l'ensemble vide si $k < 0$.

Méthode — intersection d'un cercle et d'une droite parallèle à un axe. Remplacer x (ou y) par sa valeur dans l'équation du cercle : on obtient une équation du second degré, qui a deux, une ou zéro solution selon que la droite est sécante, tangente ou extérieure au cercle.

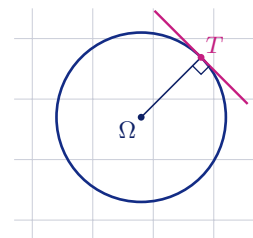


Figure 2 — La tangente en T est perpendiculaire au rayon $[\Omega T]$.

4 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Lire un vecteur normal et un vecteur directeur sur une équation cartésienne, et réciproquement.
- Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur normal : hauteur, médiatrice, tangente à un cercle.
- Étudier le parallélisme ou l'orthogonalité de deux droites ; déterminer leur point d'intersection.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite, puis la distance de ce point à la droite.
- Déterminer l'équation d'un cercle, reconnaître un cercle par complétion des carrés, chercher l'intersection d'un cercle et d'une droite parallèle à un axe.

5 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — équation d'une hauteur

Soit $A(1; 4)$, $B(-2; 1)$ et $C(4; 3)$. La hauteur issue de A a pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}(6; 2)$, donc une équation de la forme $6x + 2y + c = 0$. Comme A lui appartient : $6 + 8 + c = 0$, d'où $c = -14$ et l'équation $6x + 2y - 14 = 0$, soit $3x + y - 7 = 0$.

★ EXEMPLE — projeté orthogonal

Soit $d : x + 2y - 4 = 0$ et $A(3; 3)$. Un vecteur directeur de d est $\vec{u}(-2; 1)$: la perpendiculaire à d passant par A a pour équation $-2x + y + c = 0$ avec $-6 + 3 + c = 0$, soit $-2x + y + 3 = 0$, c'est-à-dire $y = 2x - 3$. En reportant dans l'équation de d : $5x - 10 = 0$, d'où $H(2; 1)$ et $d(A, d) = AH = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$.

★ EXEMPLE — reconnaître un cercle

$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ s'écrit $(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 + 9 = 0$, soit $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$: c'est le cercle de centre $\Omega(3; -2)$ et de rayon 2.

★ EXEMPLE — intersection avec une droite

Avec le cercle précédent et la droite d'équation $x = 4$: $(4 - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$ donne $(y + 2)^2 = 3$, donc $y = -2 \pm \sqrt{3}$: deux points d'intersection, $(4; -2 + \sqrt{3})$ et $(4; -2 - \sqrt{3})$.

✗ PIÈGES

- Toutes les formules de ce chapitre supposent le repère **orthonormé** : sinon, pas de vecteur normal ni de distance calculable ainsi.
- Ne pas échanger vecteur normal et vecteur directeur : pour $ax + by + c = 0$, $\vec{n}(a; b)$ est normal, $\vec{u}(-b; a)$ est directeur.
- Une équation cartésienne n'est pas unique : $3x + y - 7 = 0$ et $6x + 2y - 14 = 0$ décrivent la même droite.
- Dans $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, le second membre est le **carré** du rayon, et les signes de x_0 et y_0 s'inversent dans les parenthèses.
- Une équation de la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ne définit pas toujours un cercle : conclure seulement après avoir complété les carrés.