

Approfondissement Géométrie repérée

Pour aller plus loin : vecteur normal et équation cartésienne, distance d'un point à une droite, droite et cercle d'Euler, tangentes issues d'un point, lignes de niveau, cercles tangents aux axes

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 3 h · sans calculatrice

Exercice 1 Démonstration : vecteur normal et équation cartésienne

●●●

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

- 1.1 Soit $A(x_A; y_A)$ un point et $\vec{n}(a; b)$ un vecteur non nul. Justifier qu'un point M appartient à la droite d passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. En déduire que d admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.
- 1.2 Réciproque. Soit a, b, c des réels avec $(a; b) \neq (0; 0)$, et E l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$. Déterminer un point A de E (cas $b \neq 0$, puis $b = 0$) et démontrer que $M \in E \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, où $\vec{n}(a; b)$. Conclure; justifier que $\vec{u}(-b; a)$ dirige E .
- 1.3 On considère les droites $d : ax + by + c = 0$ et $d' : a'x + b'y + c' = 0$. Démontrer que d et d' sont perpendiculaires si, et seulement si, $aa' + bb' = 0$, et qu'elles sont parallèles si, et seulement si, $ab' - a'b = 0$.
- 1.4 En déduire que deux droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $mm' = -1$.

Exercice 2 La formule de la distance d'un point à une droite

●●●

(Prolongement du programme.) On considère la droite d d'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$, un point $A(x_0; y_0)$ et son projeté orthogonal H sur d .

- 2.1 Justifier qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AH} = t\vec{n}$, où $\vec{n}(a; b)$. En exprimant que H appartient à d , démontrer que $t = -(ax_0 + by_0 + c)/(a^2 + b^2)$, puis que la distance du point A à la droite d est $AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- 2.2 Calculer la distance du point $A(2; -1)$ à la droite d_1 d'équation $3x - 4y + 7 = 0$, puis la distance entre les droites parallèles d_1 et $d_2 : 3x - 4y - 8 = 0$.
- 2.3 Déterminer une équation du cercle de centre $\Omega(1; 2)$ tangent à la droite Δ d'équation $3x - 4y - 10 = 0$, ainsi que les coordonnées de son point de contact avec Δ .
- 2.4 (Hors programme — pour aller plus loin : bissectrices.) Vérifier que d_1 et $d_3 : 4x + 3y + 1 = 0$ sont perpendiculaires et sécantes en $K(-1; 1)$. Démontrer que l'ensemble des points équidistants de d_1 et de d_3 est la réunion de deux droites perpendiculaires, dont on donnera des équations.

Exercice 3 Les tangentes issues d'un point extérieur

●●●

On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 25$, de centre O , et le point $P(7; 1)$.

- 3.1 Justifier que le point P est à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$.
- 3.2 Soit T un point de $\mathcal{C}$. Justifier que la tangente à $\mathcal{C}$ en T passe par P si, et seulement si, $\overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$. En déduire que les points de contact des tangentes issues de P sont les points communs à $\mathcal{C}$ et au cercle $\mathcal{C}'$ d'équation $x^2 + y^2 - 7x - y = 0$, dont on précisera le centre et le rayon.
- 3.3 En soustrayant membre à membre les équations des deux cercles, démontrer que ces points de contact vérifient $y = 25 - 7x$, puis déterminer leurs coordonnées T_1 et T_2 .
- 3.4 Déterminer des équations des deux tangentes (PT_1) et (PT_2) . Démontrer qu'elles sont perpendiculaires et préciser la nature du quadrilatère OT_1PT_2 .

3.5 Autre méthode. À l'aide de la formule de l'exercice 2, retrouver les réels k pour lesquels la droite d'équation $y - 1 = k(x - 7)$ est tangente à $\mathcal{C}$.

Exercice 4 La droite d'Euler et le cercle d'Euler



Dans un repère orthonormé d'origine O , on considère les points $A(-4; -3)$, $B(4; -3)$ et $C(3; 4)$ (figure 1).

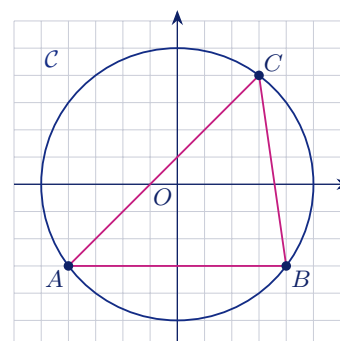


Figure 1 — Le triangle ABC

- 4.1** Démontrer que O est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC , et donner une équation de $\mathcal{C}$.
- 4.2** Déterminer des équations des hauteurs issues de C et de A , puis les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC . Comparer $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
- 4.3** Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC . Démontrer que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$: les points O , G et H sont alignés sur une droite appelée *droite d'Euler*. En donner une équation.
- 4.4** (Hors programme — pour aller plus loin.) Soit N le milieu de $[OH]$. Démontrer que le cercle $\mathcal{E}$ de centre N et de rayon $\frac{5}{2}$ passe par le milieu de $[AB]$, par le pied de la hauteur issue de C et par les milieux de $[AH]$ et de $[CH]$ (c'est le *cercle d'Euler*, ou cercle des neuf points).
- 4.5** *Cas général.* Soit ABC un triangle quelconque, de centre du cercle circonscrit O , et H' le point défini par $\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. En utilisant $OB = OC$, démontrer que $\overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. En déduire que H' est l'orthocentre du triangle, puis que la relation $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ est toujours vraie.

Exercice 5 Lignes de niveau : le cercle d'Apollonius



On considère les points $A(-1; 0)$ et $B(2; 0)$.

- 5.1** Démontrer que l'ensemble Γ des points M tels que $MA = 2MB$ est le cercle d'équation $(x - 3)^2 + y^2 = 4$. Vérifier que Γ passe par les points I et J de l'axe des abscisses tels que $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{JA} = 2\overrightarrow{JB}$, et que $[IJ]$ est un diamètre de Γ .
- 5.2** Plus généralement, soit k un réel strictement positif. Démontrer que l'ensemble des points M tels que $MA = kMB$ est un cercle si $k \neq 1$, dont on exprimera le centre et le rayon en fonction de k . Que se passe-t-il si $k = 1$?
- 5.3** Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 29$, puis celui des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 3$.

Exercice 6 Cercles tangents aux deux axes



On cherche les cercles tangents aux deux axes du repère orthonormé et passant par le point $P(2; 1)$.

- 6.1** Justifier qu'un tel cercle, de rayon r , a pour équation $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$.
- 6.2** Démontrer qu'il existe exactement deux cercles solutions $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, de centres Ω_1 et Ω_2 à préciser.
- 6.3** Démontrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se recoupent en Q , symétrique de P par rapport à la droite d'équation $y = x$, et que $(PQ) \perp (\Omega_1\Omega_2)$.
- 6.4** Déterminer de même les cercles tangents aux deux axes passant par $R(9; 2)$.