

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 5



R. RINGUET · 2026 – 2027

Sujet type épreuve anticipée

Fonctions dérivées

Partie 1 : douze questions d'automatismes — Partie 2 : une fonction avec racine carrée, coût moyen d'une chocolaterie, pliages successifs

Durée : 2 h · sans calculatrice · QCM et 3 exercices · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

L'usage de la calculatrice est interdit. Le sujet comporte deux parties indépendantes. **Partie 1** : pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie, sans justification. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. **Partie 2** : les réponses doivent être justifiées ; la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent dans l'appréciation des copies.

Partie 1 — Automatismes (6 points)

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

6 pts ●○○○

- 1.1** Le nombre $(\sqrt{3} + 1)^2$ est égal à :
- a) 4 b) $4 + \sqrt{3}$ c) $4 + 2\sqrt{3}$ d) $2 + 2\sqrt{3}$
- 1.2** L'inverse du nombre $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ est :
- a) $\frac{6}{5}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{15}{2}$ d) $-\frac{5}{6}$
- 1.3** Pour tout réel x , l'expression $x^2 - 10x + 25$ est égale à :
- a) $(x + 5)^2$ b) $(x - 5)^2$ c) $(x - 5)(x + 5)$ d) $x(x - 10) + 5$
- 1.4** L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = 5x$ est :
- a) $\{5\}$ b) $\{-5; 5\}$ c) $\{\sqrt{5}\}$ d) $\{0; 5\}$
- 1.5** Dans une classe de 32 élèves, 12 étudient le latin. La proportion d'élèves de la classe qui étudient le latin est :
- a) 12 % b) 32 % c) 37,5 % d) 20 %
- 1.6** Le prix d'un article baisse de 20 %, puis augmente de 25 %. Sur l'ensemble des deux évolutions, le prix :
- a) a augmenté de 5 % b) n'a pas changé
- c) a baissé de 5 % d) a augmenté de 0,5 %
- 1.7** Dans un repère, la droite passant par le point $A(2; 1)$ et de coefficient directeur -3 a pour équation réduite :
- a) $y = -3x + 7$ b) $y = -3x + 1$ c) $y = 2x - 3$ d) $y = -3x - 5$

- 1.8** La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre représente une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite T est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1. Le nombre $f'(1)$ est égal à :

a) 2 b) -2 c) $-\frac{1}{2}$ d) 4

- 1.9** La fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - \frac{2}{x}$ a pour dérivée :

a) $g'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^2}$ b) $g'(x) = 3x^2 - 2$
 c) $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x}$ d) $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^2}$

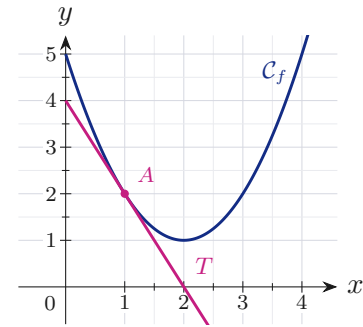


Figure 1 — Question 1.8

- 1.10** Une fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie $h(2) = 3$ et $h'(2) = -1$. La tangente à sa courbe au point d'abscisse 2 a pour équation :

a) $y = -x + 3$ b) $y = 3x - 7$ c) $y = -x + 5$ d) $y = -x + 1$

- 1.11** La moyenne de la série de notes 12; 8; 15; 10; x est égale à 11. La note x est égale à :

a) 11 b) 9 c) 55 d) 10

- 1.12** Le tableau ci-dessous répartit les 400 spectateurs d'un cinéma selon leur âge et leur tarif. On choisit un spectateur au hasard. La probabilité qu'il soit un enfant **et** qu'il ait payé plein tarif est :

	Plein tarif	Tarif réduit	Total
Adultes	180	60	240
Enfants	40	120	160
Total	220	180	400

a) 0,25 b) $\frac{2}{11}$ c) 0,4 d) 0,1

Partie 2 — Exercices (14 points)

Exercice 2 Une fonction avec une racine carrée

5 pts ●●○

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative, tracée ci-contre.

- 2.1** Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et calculer $f(4)$. Contrôler sur la figure.

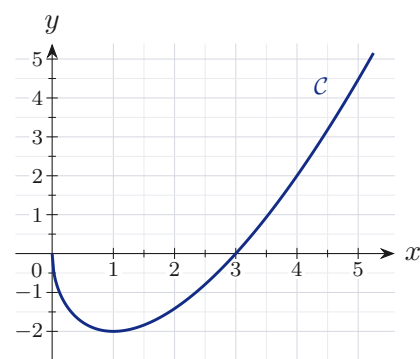
- 2.2** Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$, puis démontrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$.

- 2.3** Déterminer les coordonnées du point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est horizontale.

- 2.4** Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4.

- 2.5** On cherche les points de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x > 0$ en lesquels la tangente est parallèle à T . Démontrer que cela revient à résoudre $2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0$. En posant $X = \sqrt{x}$, en déduire que le point d'abscisse 4 est le seul point qui convient.

- 2.6** Pour $h > 0$, montrer que $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h-3}{\sqrt{h}}$. Que devient ce quotient lorsque h se rapproche de 0? La fonction f est-elle dérivable en 0?

Figure 2 — La courbe $\mathcal{C}$

Exercice 3 Le coût moyen d'une chocolaterie

5 pts ●●○

Une chocolaterie artisanale fabrique chaque jour q kilogrammes de pralinés, avec $1 \leq q \leq 40$. Le coût total de fabrication, en euros, est $C(q) = q^2 + 20q + 100$. On appelle *coût marginal* la fonction C' , et *coût moyen* la fonction M définie sur $[1; 40]$ par $M(q) = \frac{C(q)}{q}$: c'est le coût de fabrication d'un kilogramme. La courbe de M est tracée ci-contre.

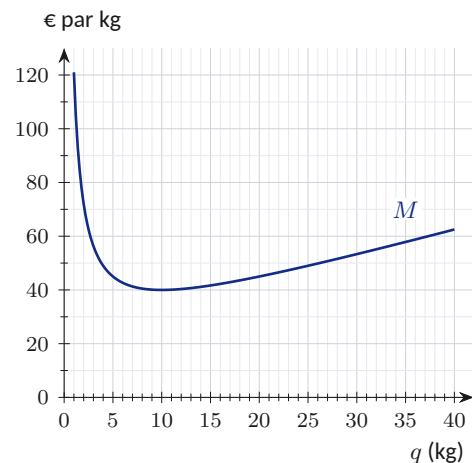


Figure 3 — Le coût moyen

- 3.1 Calculer le coût total et le coût moyen pour une production de 5 kg.
- 3.2 Calculer $C'(q)$, puis le coût marginal pour une production de 10 kg.
- 3.3 Montrer que, pour tout $q \in [1; 40]$, $M(q) = q + 20 + \frac{100}{q}$, puis que $M'(q) = \frac{(q-10)(q+10)}{q^2}$.
- 3.4 Déterminer la production pour laquelle la tangente à la courbe de M est horizontale. On admet que le coût moyen est minimal pour cette production : calculer ce coût moyen minimal et le comparer au coût marginal correspondant.
- 3.5 Les pralinés sont vendus 50 euros le kilogramme. Montrer que le bénéfice journalier est $B(q) = -q^2 + 30q - 100$. Déterminer la production qui rend ce bénéfice maximal, et ce bénéfice maximal.

Exercice 4 Pliages successifs

4 pts ●●○

Une feuille de papier rectangulaire de 20 cm sur 32 cm a une épaisseur de 0,1 mm. On la plie en deux, puis on plie en deux le résultat, et ainsi de suite (on suppose que c'est toujours possible). Pour tout entier naturel n , on note e_n l'épaisseur du pliage, en mm, et a_n l'aire de sa face supérieure, en cm^2 , après n pliages ; ainsi $e_0 = 0,1$ et $a_0 = 640$. On donne $2^{10} = 1\,024$.

- 4.1 Calculer e_1 , e_2 , a_1 et a_2 . Justifier que les suites (e_n) et (a_n) sont géométriques, préciser leurs raisons, puis exprimer e_n et a_n en fonction de n .
- 4.2 Après combien de pliages l'aire de la face supérieure est-elle égale à 10 cm^2 ?
- 4.3 Calculer e_{10} .
- 4.4 Expliquer ce que renvoie la fonction Python `pliages` ci-contre. Déterminer, sans calculatrice, la valeur renvoyée par `pliages(1000)`, et l'interpréter.

```

1 def pliages(E):
2     n = 0
3     e = 0.1
4     while e <= E:
5         n = n + 1
6         e = 2 * e
7     return n

```

- 4.5 En utilisant l'approximation $2^{10} \approx 10^3$, donner un ordre de grandeur de e_{42} en kilomètres. Comparer à la distance moyenne de la Terre à la Lune, environ 384 000 km.
- 4.6 Démontrer que $e_0 + e_1 + \dots + e_9 = e_{10} - e_0$.