

Fiche de cours Fonctions dérivées

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

1 FONCTION DÉRIVÉE

Définition. Une fonction f est **dérivable sur un intervalle** I lorsqu'elle est dérivable en *chaque* réel a de I . La fonction qui, à tout x de I , associe le nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la **fonction dérivée** de f sur I ; on la note f' .

Notation. Ne pas confondre $f'(a)$, qui est un **nombre** (le nombre dérivé en a), et f' , qui est une **fonction**. En physique, la dérivée d'une fonction du temps se note aussi $\dot{x}(t)$.

2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

$f(x)$	k (constante)	x	x^n ($n \geq 1$ entier)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ ($n \geq 1$)	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
dérivable sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$	$] 0 ; +\infty[$

Remarque. La fonction racine carrée est définie sur $]0 ; +\infty[$ mais dérivable seulement sur $]0 ; +\infty[$: elle n'est **pas dérivable en 0**. La formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ vaut pour tout entier relatif n non nul, sur tout intervalle où x^n est défini.

3 OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVÉES

Théorème. Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

■ FORMULAIRE

- $(u + v)' = u' + v'$; $(ku)' = k u'$; $(uv)' = u'v + uv'$.
- Si v ne s'annule pas sur I : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Remarque. Démonstrations exigibles : pour $f(x) = x^2$, le taux de variation vaut $\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h \rightarrow 2a$; pour $f(x) = \frac{1}{x}$, il vaut $\frac{-1}{a(a+h)} \rightarrow -\frac{1}{a^2}$; pour un produit, on écrit $u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)$ en faisant apparaître $u(a+h)v(a)$.

4 FONCTION VALEUR ABSOLUE

Définition. Pour tout réel x : $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$. Le nombre $|x|$ est la **distance de x à 0**, et $|x - a|$ la distance entre x et a .

Propriété. La courbe de la fonction valeur absolue est formée de **deux demi-droites** de sommet l'origine. Cette fonction est dérivable sur $] -\infty ; 0[$, où sa dérivée vaut -1 , et sur $] 0 ; +\infty[$, où sa dérivée vaut 1 .

Propriété. La fonction valeur absolue n'est **pas dérivable en 0** : le taux de variation $\frac{|h|}{h}$ vaut 1 pour $h > 0$ et -1 pour $h < 0$; il ne tend vers aucun nombre. La courbe présente un **point anguleux** en 0.

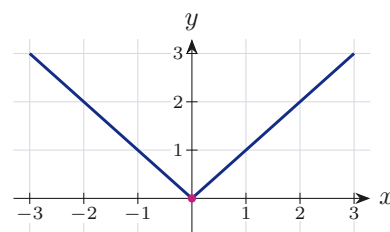


Figure 1 — La courbe de $x \mapsto |x|$: deux demi-droites et un point anguleux en 0.

5 UTILISER LA FONCTION DÉRIVÉE

Méthode — calculer un nombre dérivé. Déterminer d'abord la fonction dérivée f' , puis remplacer x par a : c'est bien plus rapide que la limite du taux de variation.

Méthode — équation de tangente. Au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. **Tangente horizontale** en a : cela équivaut à $f'(a) = 0$, donc on résout cette équation.

6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Donner l'ensemble de dérivabilité d'une fonction et sa dérivée parmi les fonctions de référence.
- Dériver un polynôme, une somme, un produit par un réel.
- Dériver un produit, un inverse, un quotient, puis réduire l'expression obtenue au même dénominateur.
- Dériver une expression contenant $\sqrt{x}$ en précisant l'intervalle d'étude.
- Calculer un nombre dérivé et une équation de tangente à partir de f' ; trouver les points où la tangente est horizontale.
- Connaître la fonction valeur absolue, sa courbe et sa non-dérivabilité en 0.

7 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — polynôme et racine carrée

Pour $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 7$ sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 12x^2 - 10x + 2$. Pour $g(x) = 5\sqrt{x} - 3x$ sur $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} - 3$.

★ EXEMPLE — dérivée d'un produit

Soit $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$. Avec $u = 2x + 1$, $u' = 2$, $v = x^2 - 3$, $v' = 2x$:

$$f'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1) \times 2x = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6.$$

Vérification en développant d'abord : $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$, dont la dérivée est bien $6x^2 + 2x - 6$.

★ EXEMPLE — dérivée d'un quotient

Soit $h(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$ sur $] -2; +\infty[$. Avec $u = 3x - 1$, $u' = 3$, $v = x + 2$, $v' = 1$:

$$h'(x) = \frac{3(x + 2) - (3x - 1) \times 1}{(x + 2)^2} = \frac{7}{(x + 2)^2} > 0.$$

★ EXEMPLE — tangente horizontale

Soit $f(x) = x^3 - 12x + 3$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$, qui s'annule en -2 et en 2 : la courbe admet une tangente horizontale aux points $A(-2; 19)$ et $B(2; -13)$.

✖ PIÈGES

- $(uv)' \neq u'v'$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'}{v'}$: il faut appliquer les formules du produit et du quotient.
- Dans $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, l'ordre des termes du numérateur compte : un signe inversé change tout.
- Toujours préciser l'intervalle : $\frac{1}{x}$ et $\sqrt{x}$ ne sont pas dérivables partout, et $\sqrt{x}$ ne l'est pas en 0.
- $(x^2 + 1)' = 2x$: la dérivée d'une constante est nulle, mais elle ne « disparaît » pas dans un produit ou un quotient.
- En Première, on ne sait pas dériver une fonction composée : $\sqrt{2x + 1}$ ou $(3x - 1)^5$ se dérivent seulement après développement, ou pas du tout.