

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 5

Exercices 2 Fonctions dérivées

Application : retrouver une fonction, vitesse instantanée, coût marginal, tangentes imposées, Python, un toboggan

6 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée (exercice 5)



R. RINGUET · 2026 – 2027

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

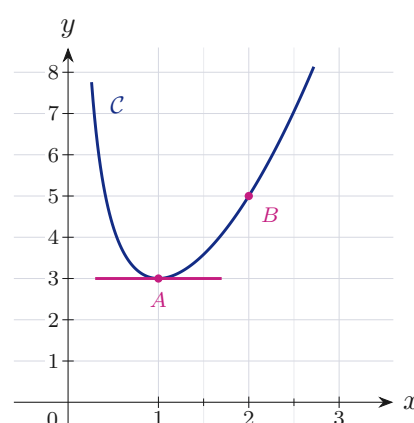
- Traduire une condition sur une tangente (horizontale, parallèle à une droite donnée) par une équation.
- Interpréter un nombre dérivé : vitesse instantanée, coût marginal, pente d'un profil.
- Contrôler un calcul de dérivée à l'aide d'un programme Python ou d'un logiciel de calcul formel.

Exercice 1 Retrouver une fonction à partir de sa courbe

●●○

La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre représente une fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$, où a et b sont deux réels. La tangente à $\mathcal{C}$ au point $A(1; 3)$ est horizontale et le point $B(2; 5)$ appartient à $\mathcal{C}$.

- 1.1 Lire $f(1)$, $f'(1)$ et $f(2)$.
- 1.2 Exprimer $f'(x)$ en fonction de a , b et x .
- 1.3 À l'aide de $f(1)$ et $f'(1)$, déterminer a et b . Vérifier la cohérence avec $f(2)$.
- 1.4 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en B , puis la tracer sur une figure analogue.
- 1.5 Vérifier que $4x^3 - 7x^2 - 4 = (x - 2)(4x^2 + x + 2)$. En déduire que B est le seul point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à T .

Figure 1 — La courbe $\mathcal{C}$ et la tangente en A

Exercice 2 Le vol d'une fusée à eau

●●○

Une fusée à eau est lancée verticalement depuis le sol. On admet que sa hauteur, en mètres, t secondes après le lancement, est $h(t) = -5t^2 + 20t$ pour $t \in [0; 4]$. Sa vitesse instantanée à l'instant t , en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, est $v(t) = h'(t)$ (elle est négative lorsque la fusée redescend).

- 2.1 Calculer $h(1)$, puis la vitesse moyenne de la fusée entre les instants $t = 0$ et $t = 1$.
- 2.2 Exprimer $v(t)$ en fonction de t . Calculer $v(0)$, puis la convertir en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
- 2.3 À quel instant la vitesse de la fusée est-elle nulle ? Quelle est alors sa hauteur ? Interpréter.
- 2.4 À quel instant la fusée retombe-t-elle au sol ? Quelle est alors sa vitesse ? Comparer avec $v(0)$.
- 2.5 Déterminer les deux instants où la fusée se déplace à $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (en montant, puis en descendant) et montrer qu'elle est alors à la même hauteur.

Exercice 3 Coût marginal dans un atelier

●●○

Un atelier d'ébénisterie fabrique chaque mois q dizaines de tables ($0 \leq q \leq 8$), pour un coût total, en milliers d'euros, de $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 20$. On appelle *coût marginal* la fonction $C' : C'(q)$ approche le coût de fabrication d'une dizaine de tables supplémentaire lorsqu'on en produit déjà q dizaines.

- 3.1 Calculer $C'(0)$ et interpréter ce résultat.

- 3.2** Calculer $C(3) - C(2)$: quel est le coût de fabrication de la troisième dizaine de tables ?
- 3.3** Calculer $C'(q)$, puis $C'(2)$. Comparer avec la question 3.2 et expliquer à l'aide de l'approximation affine $C(2+h) \approx C(2) + C'(2)h$.
- 3.4** Montrer que $C'(q) = 3(q-2)^2 + 3$. Pour quelle production le coût marginal est-il le plus faible ?
- 3.5** Une table est vendue 1 500 euros. Pour quelles productions le coût marginal dépasse-t-il le prix de vente d'une dizaine de tables ?

Exercice 4 Tangentes parallèles à une droite donnée



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = x - \frac{1}{x}$, et C sa courbe, tracée ci-contre avec la droite d d'équation $y = 2x$.

- 4.1** Calculer $f'(x)$ et justifier que $f'(x) > 1$ pour tout réel $x \neq 0$.
- 4.2** Déterminer les points de C en lesquels la tangente est parallèle à d , puis une équation de chacune de ces tangentes. Les tracer sur une figure analogue.
- 4.3** Même question avec la droite d' d'équation $y = 5x - 1$.
- 4.4** Existe-t-il des points de C en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$? est horizontale ? Justifier.

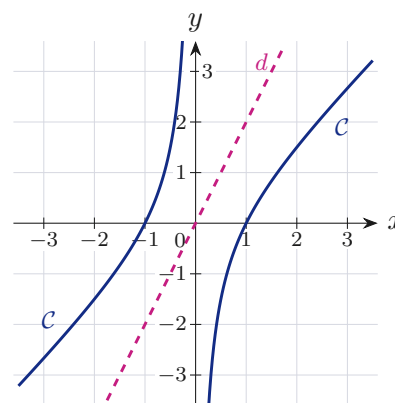


Figure 2 — La courbe C et la droite d

Exercice 5 Contrôler une dérivée avec Python ou un logiciel de calcul formel



On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2\sqrt{x}$ et le programme Python ci-contre.

- 5.1** Que renvoie l'instruction `taux(a, h)` ? Quel nombre les valeurs affichées doivent-elles approcher ?
- 5.2** À la calculatrice, donner les quatre valeurs affichées par le programme, arrondies à 10^{-3} .
- 5.3** Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, puis $f'(4)$. Le résultat est-il cohérent ?
- 5.4** Indiquer les modifications à apporter au programme pour contrôler de la même façon la valeur de $g'(1)$, où g est la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Calculer $g'(1)$.
- 5.5** Un logiciel de calcul formel affiche : $\text{Dériver}((x^2+1)/(x-2)) \rightarrow \frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$. Démontrer ce résultat.

```
1 from math import sqrt
2 def f(x):
3     return x**2 * sqrt(x)
4 def taux(a, h):
5     return (f(a+h) - f(a)) / h
6 for h in [1, 0.1, 0.01, 0.001]:
7     print(h, taux(4, h))
```

Exercice 6 Le profil d'un toboggan



Dans un repère d'unité le mètre, le profil d'un toboggan est la courbe de la fonction f définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Le toboggan part horizontalement d'une plateforme située à 3 m de hauteur et arrive horizontalement au sol, au point d'abscisse 4.

- 6.1** Traduire ces conditions à l'aide de $f(0)$, $f'(0)$, $f(4)$ et $f'(4)$. En déduire c et d , puis que $64a + 16b = -3$ et $48a + 8b = 0$. Déterminer a et b .
- 6.2** On admet que la pente est la plus forte au point d'abscisse 2. Calculer $f'(2)$ et l'exprimer en pourcentage. La norme impose une pente d'au plus 120 % en valeur absolue : est-elle respectée ?