

Approfondissement Fonctions dérivées

Pour aller plus loin : dérivée d'un produit et de x^n , valeur absolue en 0, tangentes à l'hyperbole, tangentes communes, racine carrée en 0, racine double, dérivée symétrique

7 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée (exercice 7)

Exercice 1 Démonstration : dérivée d'un produit, puis de x^n

●●●

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , a un réel de I et h un réel non nul tel que $a + h \in I$.

1.1 Démontrer, en ajoutant et en retranchant $u(a)v(a+h)$ au numérateur, que

$$\frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h}.$$

1.2 On admet que $v(a+h)$ tend vers $v(a)$ lorsque h tend vers 0. En déduire que uv est dérivable en a et que $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

1.3 Soit $n \geq 1$ un entier tel que la dérivée de $x \mapsto x^n$ soit $x \mapsto nx^{n-1}$. En écrivant $x^{n+1} = x \times x^n$, démontrer que la dérivée de $x \mapsto x^{n+1}$ est $x \mapsto (n+1)x^n$. En partant de $n = 1$, retrouver de proche en proche les dérivées de x^2 , x^3 et x^4 .

1.4 À l'aide de la formule $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$, démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ sur $]0; +\infty[$ est $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$, puis que $(x^m)' = mx^{m-1}$ sur $]0; +\infty[$ pour tout entier relatif m .

1.5 En écrivant $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ (v ne s'annulant pas sur I), retrouver la formule de dérivation d'un quotient.

Exercice 2 La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0

●●●

On note f la fonction valeur absolue, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$, et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x|x|$. Leurs courbes sont tracées ci-contre.

2.1 Pour $h \neq 0$, simplifier $\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ selon le signe de h . Ce quotient a-t-il une limite lorsque h tend vers 0 ? Conclure, puis interpréter graphiquement (on parle de *point anguleux*).

2.2 Écrire $g(x)$ sans valeur absolue sur $[0; +\infty[$ puis sur $]-\infty; 0[$. Démontrer que g est dérivable en 0 et préciser $g'(0)$. Démontrer que, pour tout réel x , $g'(x) = 2|x|$.

2.3 Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = |x^2 - 1|$. Pour $0 < h < 1$, puis pour $-1 < h < 0$, exprimer $\frac{k(1+h) - k(1)}{h}$ en fonction de h . La fonction k est-elle dérivable en 1 ?

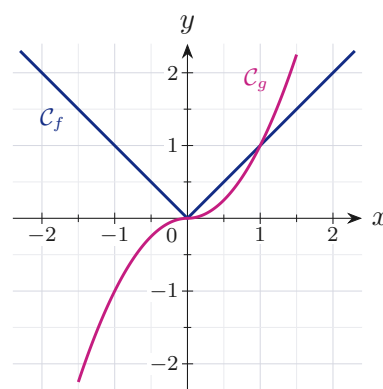


Figure 1 — Courbes de $x \mapsto |x|$ et de $x \mapsto x|x|$

Exercice 3 Les tangentes à l'hyperbole

●●●

On note $\mathcal{H}$ la courbe de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ dans un repère orthonormé d'origine O . Pour tout réel $a \neq 0$, on note M le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse a et T_a la tangente à $\mathcal{H}$ en M .

- 3.1** Démontrer que T_a a pour équation $y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$.
- 3.2** T_a coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en B . Calculer les coordonnées de A et B , puis démontrer que M est le milieu de $[AB]$. En déduire une construction simple de la tangente T_a .
- 3.3** Démontrer que l'aire du triangle OAB ne dépend pas de a .
- 3.4** Combien de tangentes à $\mathcal{H}$ passent par le point $C(4; 0)$? par le point $D(3; -1)$? Donner leurs équations.

Exercice 4 Tangentes communes à deux paraboles



Dans un repère, on considère les paraboles $\mathcal{P}_1$ d'équation $y = x^2$ et $\mathcal{P}_2$ d'équation $y = -x^2 + 8x - 10$. Une droite est une *tangente commune* à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ si elle est tangente à la fois à $\mathcal{P}_1$ (en un point d'abscisse a) et à $\mathcal{P}_2$ (en un point d'abscisse b).

- 4.1** Démontrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ n'ont aucun point commun.
- 4.2** Démontrer que la tangente à $\mathcal{P}_2$ au point d'abscisse b a pour équation $y = (8 - 2b)x + b^2 - 10$.
- 4.3** En déduire que les tangentes à $\mathcal{P}_1$ en a et à $\mathcal{P}_2$ en b sont confondues si, et seulement si, $a = 4 - b$ et $b^2 - 4b + 3 = 0$.
- 4.4** Déterminer les équations des tangentes communes à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, ainsi que les points de contact.

Exercice 5 La racine carrée, et $x\sqrt{x}$ en 0



- 5.1** Soit $a > 0$ et $h \neq 0$ tel que $a + h > 0$. Démontrer, en multipliant par la quantité conjuguée, que $\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$. En déduire la dérivée de la fonction racine carrée sur $]0; +\infty[$.
- 5.2** Rappeler pourquoi la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- 5.3** Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$. Démontrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$. Pourquoi ne peut-on pas utiliser la formule de dérivation d'un produit en 0 ? Donner l'équation de la tangente à la courbe de f à l'origine.
- 5.4** Pour quels entiers naturels n la fonction $x \mapsto x^n\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

Exercice 6 Racine double et tangente



- 6.1** Soit a un réel et Q une fonction polynôme. On pose $P(x) = (x - a)^2 Q(x)$. Démontrer que $P'(x) = (x - a)[2Q(x) + (x - a)Q'(x)]$. En déduire que la courbe de P est tangente à l'axe des abscisses au point d'abscisse a . Application : vérifier que $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$ et donner la tangente en 1 à la courbe de $x \mapsto x^3 - 3x + 2$.
- 6.2** Soit a un réel non nul. Démontrer que la tangente à la courbe de la fonction cube au point d'abscisse a a pour équation $y = 3a^2x - 2a^3$, puis que $x^3 - (3a^2x - 2a^3) = (x - a)^2(x + 2a)$. En déduire que cette tangente recoupe la courbe en un seul autre point, dont on précisera l'abscisse.

Exercice 7 Une meilleure approximation du nombre dérivé



Pour une fonction f dérivable en a et un réel $h > 0$ petit, on compare deux approximations de $f'(a)$: le taux de variation « à droite » $D(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ et le taux « symétrique » $S(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$.

- 7.1** Dans cette question, $f(x) = x^3$. Démontrer que $D(h) = 3a^2 + 3ah + h^2$ et $S(h) = 3a^2 + h^2$. Pour $a = 1$ et $h = 0,1$, calculer l'erreur commise par chaque approximation. Laquelle est la meilleure ?
- 7.2** Démontrer que, si f est une fonction polynôme du second degré, alors $S(h) = f'(a)$ pour tout $h > 0$: le taux symétrique est exact.
- 7.3** Écrire une fonction Python `sym(f, a, h)` qui renvoie $S(h)$. L'utiliser avec $h = 0,001$ pour estimer la dérivée en 4 de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ (on utilisera `from math import sqrt`), puis comparer avec la valeur exacte.