

Sujet type épreuve anticipée

Fonction exponentielle

Partie 1 : douze questions d'automatismes — Partie 2 : étude d'une fonction exponentielle, la lumière sous l'eau, une boîte en carton

Durée : 2 h · sans calculatrice · QCM et 3 exercices · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : /20

★ CONSIGNES

L'usage de la calculatrice est interdit. Le sujet comporte deux parties indépendantes. **Partie 1** : pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie, sans justification. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. **Partie 2** : les réponses doivent être justifiées ; la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent dans l'appréciation des copies.

Partie 1 — Automatismes (6 points)

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

6 pts ●○○○

1.1 Le nombre $\frac{5}{\sqrt{5}}$ est égal à :

- a) $\sqrt{5}$ b) $5\sqrt{5}$ c) 1 d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

1.2 Le tiers de $\frac{9}{10}$, augmenté de $\frac{1}{5}$, est égal à :

- a) $\frac{11}{30}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{10}$

1.3 Pour tout réel x , l'expression $x^3 - 4x$ est égale à :

- a) $x(x-2)^2$ b) $x(x-4)(x+4)$ c) $x^2(x-4)$ d) $x(x-2)(x+2)$

1.4 L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\frac{x-2}{x+3} \leq 0$ est :

- a) $[-3; 2]$ b) $] -\infty; -3] \cup [2; +\infty[$
c) $] -3; 2]$ d) $[-2; 3[$

1.5 La population d'un village passe de 2 000 à 1 700 habitants. Le taux d'évolution de cette population est :

- a) -15 % b) -17,6 % c) +15 % d) -30 %

1.6 Le prix d'un article augmente de 20 %, puis de 5 %. Sur l'ensemble des deux hausses, il a augmenté de :

- a) 25 % b) 1 % c) 24 % d) 26 %

1.7 Dans un repère, le point qui appartient à la droite d'équation $y = -2x + 5$ est :

- a) $A(3; 1)$ b) $B(-1; 3)$ c) $C(3; -1)$ d) $D(2; -1)$

1.8 La courbe ci-contre représente une fonction $t \mapsto e^{kt}$, où k est un réel. La droite Δ est sa tangente au point $A(0; 1)$; elle passe par le point $B(2; 0)$. Le réel k est égal à :

- a) 0,5 b) -0,5 c) 2 d) -2

1.9 A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,1$. La probabilité conditionnelle $P_B(A)$ est égale à :

- a) 0,2 b) 0,04 c) 0,05 d) 0,25

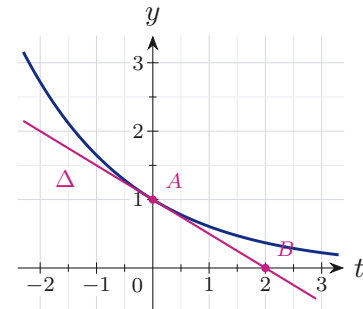


Figure 1 — Question 1.8

1.10 Une série statistique a pour moyenne 12 et pour étendue 8. On ajoute 2 à chacune de ses valeurs. La nouvelle série a pour :

- a) moyenne 14, étendue 10 b) moyenne 12, étendue 8
c) moyenne 14, étendue 8 d) moyenne 24, étendue 16

1.11 Pour tout réel x , le nombre $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-1}}$ est égal à :

- a) e^x b) e^{x+2} c) e^{3x} d) e^2

1.12 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{2x}$ a pour dérivée la fonction f' définie par :

- a) $(2x+3)e^{2x}$ b) $2e^{2x}$ c) $(x+2)e^{2x}$ d) $(2x+2)e^{2x}$

Partie 2 — Exercices (14 points)

Exercice 2 Étude d'une fonction exponentielle

5 pts ●●○

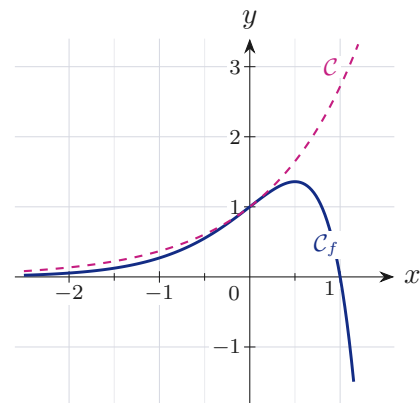
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)e^{2x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, tracée ci-contre avec la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction exponentielle.

2.1 Calculer $f(0)$, résoudre l'équation $f(x) = 0$ et étudier le signe de $f(x)$.

2.2 Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (1-2x)e^{2x}$.

2.3 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (sans les limites). Préciser la valeur exacte du maximum de f .

2.4 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Que remarque-t-on ?

Figure 2 — Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}$

2.5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leq e^{2x}$.

2.6 On souhaite démontrer que $\mathcal{C}_f$ est située au-dessous de $\mathcal{C}$, les deux courbes n'ayant qu'un point commun.

- a) Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) - e^x = e^x \varphi(x)$, où $\varphi(x) = (1-x)e^x - 1$.
b) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que $\varphi(x) \leq 0$ pour tout réel x . Conclure, en précisant le point commun aux deux courbes.

Exercice 3 La lumière sous l'eau

5 pts ●●○

Dans un lac, l'intensité lumineuse diminue avec la profondeur. On modélise l'intensité lumineuse à d mètres de profondeur, exprimée en pourcentage de l'intensité à la surface, par $I(d) = 100 e^{-0,2d}$, pour $d \in [0 ; 30]$.

■ DONNÉES $e^{-1} \approx 0,37$ • $e^{-3} \approx 0,05$

- 3.1** Calculer $I(0)$. Déterminer $I'(d)$ et en déduire le sens de variation de I sur $[0 ; 30]$.
- 3.2** La courbe de la fonction I est tracée ci-contre. Lire graphiquement la profondeur à partir de laquelle l'intensité lumineuse est inférieure à la moitié de celle de la surface.
- 3.3** Montrer que, pour tout $d \in [0 ; 25]$, $I(d+5) = \frac{I(d)}{e}$. En déduire le pourcentage de lumière perdu à chaque fois que l'on descend de 5 mètres.

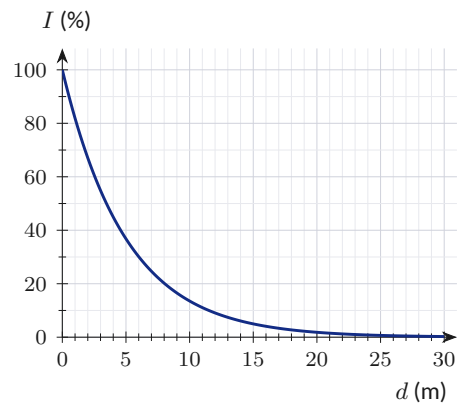


Figure 3 — Intensité lumineuse

- 3.4** Pour tout entier n compris entre 0 et 6, on pose $u_n = I(5n)$. Justifier que la suite (u_n) est géométrique; exprimer u_n en fonction de n .
- 3.5** Les algues de ce lac ne peuvent se développer que si l'intensité lumineuse est au moins égale à $100 e^{-3} \%$ de celle de la surface (soit environ 5 %). Justifier que cela revient à résoudre $e^{-0,2d} \geq e^{-3}$, puis déterminer la profondeur maximale à laquelle on peut trouver ces algues.
- 3.6** On souhaite déterminer la profondeur entière à partir de laquelle l'intensité lumineuse devient inférieure à 1 % de celle de la surface. Recopier et compléter la fonction Python ci-contre pour que `profondeur(1)` renvoie cette profondeur.

```
1 from math import exp
2 def profondeur(p):
3     d = 0
4     while ..... :
5         d = .....
6     return d
```

Exercice 4 Une boîte en carton

4 pts ●●○

Dans une plaque de carton carrée de 12 cm de côté, on découpe à chaque coin un carré de côté x cm, puis on relève les bords pour obtenir une boîte sans couvercle, de base carrée (figure 4). On note $V(x)$ le volume de la boîte, en cm^3 .

- 4.1** Justifier que x appartient à l'intervalle $]0 ; 6[$ et que $V(x) = x(12 - 2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.
- 4.2** Calculer $V'(x)$ et montrer que $V'(x) = 12(x - 2)(x - 6)$.
- 4.3** Dresser le tableau de variations de V sur $]0 ; 6[$. Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal? Quel est ce volume maximal?
- 4.4** Vérifier que, pour tout réel x , $V(x) - 128 = 4(x - 2)^2(x - 8)$. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.
- 4.5** Comparer la hauteur de la boîte de volume maximal au côté de sa base.

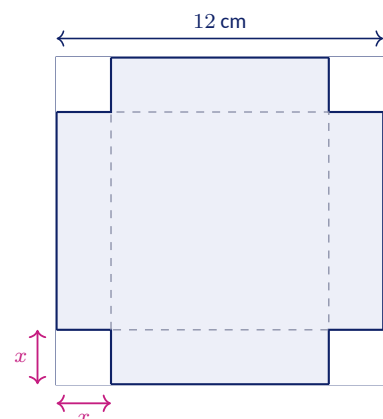


Figure 4 — Le patron de la boîte