

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 7

Fiche de cours

Fonction exponentielle

L'essentiel du chapitre en deux pages

définitions · propriétés · méthodes · à savoir par cœur



R. RINGUET · 2026 - 2027

1 DÉFINITION ET NOTATION

Définition. Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, appelée **fonction exponentielle** et notée $\exp$, telle que

$$\exp' = \exp \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1$$

(existence et unicité admises).

Notation. On pose $e = \exp(1) \approx 2,718$ et, pour tout réel x , $\exp(x) = e^x$. Ainsi $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

Propriété. Pour tout réel x , $e^x > 0$: la fonction exponentielle ne s'annule jamais et sa courbe est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses. De plus, $e^x \times e^{-x} = 1$: e^x et e^{-x} sont inverses l'un de l'autre.

2 RÈGLES DE CALCUL

Propriété — relation fonctionnelle. Pour tous réels x et y : $e^{x+y} = e^x \times e^y$. On en déduit :

■ FORMULAIRE

- Pour tous réels a et b et tout entier relatif n :

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad (e^a)^n = e^{na}, \quad e^a = e^b \iff a = b, \quad e^a < e^b \iff a < b.$$

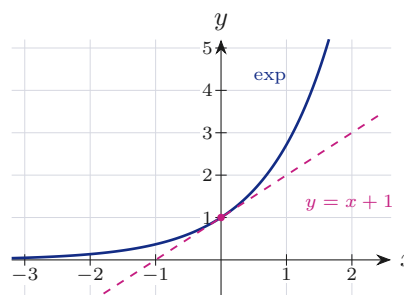
- Dérivées : $(e^x)' = e^x$ et, pour tout réel a , $(e^{at})' = a e^{at}$. Tangente en 0 à la courbe de $\exp$: $y = x + 1$.
- Valeurs utiles : $e^{-1} \approx 0,37$; $e^{0,5} \approx 1,65$; $e \approx 2,72$; $e^2 \approx 7,39$.

Méthode — transformer une expression. Tout ramener à des sommes d'exposants : un produit devient une somme, un quotient une différence, une puissance un produit. Pour factoriser, mettre en facteur l'exponentielle de plus petit exposant ; e^x étant non nul, on peut toujours diviser par e^x .

3 ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriété. $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\exp$; comme $e^x > 0$, elle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de e^x	+	
variations de e^x		



Remarque. e^x se rapproche de 0 quand x prend de grandes valeurs négatives, et croît très vite quand x augmente.

Figure 1 — La courbe de $\exp$ passe par $(0; 1)$ et $(1; e)$, elle est au-dessus de sa tangente en 0 : $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .

Propriété — lien avec les suites géométriques. Pour tout réel a , la suite de terme général $u_n = e^{an}$ est **géométrique** de raison e^a et de premier terme $u_0 = 1$, car $u_{n+1} = e^a \times u_n$. Plus généralement, si $f(t) = C e^{kt}$, alors $f(t+h) = e^{kh} \times f(t)$: sur des durées égales, la grandeur est multipliée par un même coefficient.

4 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

Propriété. La stricte croissance de $\exp$ donne, pour tous réels a et b : $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$. De plus $e^x = k$ n'a *aucune* solution si $k \leq 0$.

Méthode — équations et inéquations. Écrire les deux membres sous la forme $e^{\text{expression}}$, puis identifier ou comparer les exposants. Si l'inconnue apparaît en e^x et en e^{2x} , poser $X = e^x$ avec la condition $X > 0$, résoudre en X , puis revenir à x en ne gardant que les racines strictement positives.

5 DÉRIVATION ET FONCTIONS $t \mapsto e^{kt}$

Propriété. Pour tout réel a , la fonction $t \mapsto e^{at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $t \mapsto a e^{at}$. Avec les opérations usuelles : $(u e^x)' = (u' + u) e^x$, par exemple $((ax + b)e^x)' = (ax + a + b) e^x$.

Méthode — étudier le signe d'une dérivée. Dans une expression du type $P(x) e^{kx}$, le facteur e^{kx} est toujours strictement positif : le signe ne dépend que de celui de $P(x)$.

Propriété — croissance et décroissance exponentielles. Soit $k > 0$ et $C > 0$. La fonction $t \mapsto C e^{kt}$ est strictement croissante (croissance exponentielle); $t \mapsto C e^{-kt}$ est strictement décroissante, vaut C en $t = 0$ et se rapproche de 0 : modèle d'une désintégration radioactive, d'un refroidissement, de l'élimination d'un médicament.

Remarque. Algorithmes du chapitre : **méthode d'Euler** ($y_{n+1} = y_n + h y_n$, $y_0 = 1$, d'après $f(t+h) \approx f(t) + h f'(t)$); valeurs approchées de e par $(1 + \frac{1}{n})^n$.

6 SAVOIR-FAIRE DU CHAPITRE

► SAVOIR-FAIRE

- Transformer une expression avec des exponentielles : écrire sous la forme e^m , développer, factoriser.
- Comparer des exponentielles, étudier le signe d'une expression du type $P(x) e^{kx}$.
- Résoudre une équation ou une inéquation du type $e^a = e^b$, $e^a < e^b$, ou s'y ramenant en posant $X = e^x$.
- Dériver une fonction contenant e^x ou e^{at} , dresser son tableau de variations, déterminer une tangente.
- Modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle par $t \mapsto C e^{kt}$, la relier à une suite géométrique, déterminer un seuil par balayage.

7 EXEMPLES TYPES

★ EXEMPLE — calcul et factorisation

$A = \frac{e^{2x} \times e^3}{e^{x-1}} = e^{2x+3-(x-1)} = e^{x+4}$. Et $e^{2x} - e^x = e^x (e^x - 1)$ est du signe de $e^x - 1$ car $e^x > 0$: négatif pour $x < 0$, nul en 0, positif pour $x > 0$.

★ EXEMPLE — équation en posant $X = e^x$

Résoudre $e^{2x} - (e^2 + 1) e^x + e^2 = 0$. On pose $X = e^x$, avec $X > 0$: l'équation devient $X^2 - (e^2 + 1) X + e^2 = 0$, qui se factorise en $(X - 1)(X - e^2) = 0$ (somme $e^2 + 1$, produit e^2). Les deux racines 1 et e^2 sont positives, donc $e^x = e^0$ ou $e^x = e^2$: $\mathcal{S} = \{0; 2\}$.

★ EXEMPLE — étude d'une fonction

Soit $f(x) = (x - 2) e^x$ sur $\mathbb{R}$. Alors $f'(x) = 1 \times e^x + (x - 2) e^x = (x - 1) e^x$, du signe de $x - 1$: f est décroissante sur $]-\infty; 1]$, croissante sur $[1; +\infty[$, et son minimum est $f(1) = -e \approx -2,72$.

★ EXEMPLE — décroissance exponentielle

L'activité d'une source vérifie $A(t) = A_0 e^{-0,08t}$ (t en jours) : $A'(t) = -0,08 A(t) < 0$, donc A décroît. De plus $A(t + 10) = e^{-0,8} A(t) \approx 0,449 A(t)$: en 10 jours l'activité baisse d'environ 55 %.

✗ PIÈGES

- $e^{x+y} = e^x e^y$, mais $e^{x+y} \neq e^x + e^y$; et $e^{xy} \neq e^x \times e^y$.
- e^x est toujours strictement positif : l'équation $e^x = -2$ n'a pas de solution, et e^x ne change jamais le signe d'un produit.
- $(e^x)^2 = e^{2x}$ n'est pas e^{x^2} ; en posant $X = e^x$, ne pas oublier $X > 0$: une racine négative est à rejeter.
- $(e^{at})' = a e^{at}$: le facteur a est indispensable, surtout avec $a < 0$ où la dérivée est négative.