

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 7



R. RINGUET · 2026 – 2027

Exercices 1 Fonction exponentielle

Les bases : règles de calcul, équations et inéquations, dérivées, tangentes, fonctions $t \mapsto e^{kt}$

8 exercices · niveau ●○○ · durée conseillée : 2 h · sans calculatrice

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Utiliser les règles de calcul sur les exponentielles pour transformer une expression.
- Résoudre des équations et inéquations du type $e^a = e^b$, $e^a < e^b$, ou s'y ramenant en posant $X = e^x$.
- Dériver une fonction faisant intervenir e^x ou e^{at} , étudier son signe et ses variations.
- Connaître la courbe de la fonction exponentielle, ses tangentes, et l'allure des courbes de $t \mapsto e^{kt}$.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- La fonction exponentielle, notée $\exp$, est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. On note $e = \exp(1) \approx 2,718$ et, pour tout réel x , $\exp(x) = e^x$.
- Pour tous réels a et b et tout entier relatif n : $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^n = e^{na}$; $e^0 = 1$.
- Pour tout réel x , $e^x > 0$. La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$.
- $(e^x)' = e^x$; pour tout réel a , la fonction $t \mapsto e^{at}$ a pour dérivée $t \mapsto a e^{at}$. Tangente à la courbe de $\exp$ au point d'abscisse 0 : $y = x + 1$.

Exercice 1 Règles de calcul

●○○

Écrire chaque nombre ou expression sous la forme e^m , où m est un réel ou une expression en x (x désigne un réel).

- a) $A = e^5 \times e^{-2}$ b) $B = \frac{e^3}{e^7}$ c) $C = (e^{-2})^3 \times e^4$ d) $D = e^{2x+1} \times e^{3-x}$
- e) $E = \frac{e^x}{e^{x-2}}$ f) $F = \frac{(e^{x+1})^2}{e^{3x}}$ g) $G = \frac{1}{e^{3-x}}$ h) $H = \frac{e^{2x} \times e^{-1}}{e^{x+1}}$

Exercice 2 Transformer une expression

●○○

Dans tout l'exercice, x désigne un réel.

- 2.1 Développer et réduire : $(e^x + 2)^2$; $(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})$; $e^{-x}(e^{2x} - 3e^x)$.
- 2.2 Factoriser : $e^{2x} - e^x$; $x e^x + 3e^x$; $e^{2x} - 9$.
- 2.3 Démontrer que $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

Exercice 3 Signes et comparaisons

●○○

- 3.1 Ranger dans l'ordre croissant, sans calculatrice : e^{-1} ; $e^{0,5}$; 1; e ; e^{-2} ; $\frac{1}{e^3}$; $e^{\sqrt{2}}$; $e^{1,5}$.
- 3.2 Étudier le signe, selon les valeurs du réel x , de chacune des expressions suivantes.
- a) $f(x) = (x - 4)e^x$ b) $g(x) = -2e^{3x}$ c) $h(x) = (1 - 2x)e^{-x}$
- d) $k(x) = e^x + 5$ e) $m(x) = x^2 e^x$ f) $p(x) = e^x(x^2 - 9)$

Exercice 4 Équations

●○○

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $e^{3x-1} = e^{x+5}$

b) $e^{2x+4} = 1$

c) $e^x = -3$

d) $e^x \times e^{x+3} = e^7$

e) $e^{x^2} = e^{5x-6}$

f) $\frac{e^{x^2}}{e^x} = e^6$

Exercice 5 Inéquations, et un changement de variable

●●○

5.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $e^{2x-3} > e^x$

b) $e^{-x} \leq 1$

c) $e^{x^2} < e^{x+2}$

d) $\frac{1}{e^x} > e^{2x-6}$

5.2 Factoriser le trinôme $X^2 + X - 2$. En posant $X = e^x$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} + e^x - 2 = 0$, puis l'inéquation $e^{2x} + e^x - 2 < 0$.

Exercice 6 Calculs de dérivées

●○○

Calculer la dérivée de chaque fonction (f_7 est définie sur $]0; +\infty[$, les autres sur $\mathbb{R}$), et l'écrire sous forme factorisée lorsque c'est possible.

a) $f_1(x) = 4e^x - x^2$

b) $f_2(t) = e^{5t}$

c) $f_3(t) = 3e^{-0,5t} + 2$

d) $f_4(x) = x e^x$

e) $f_5(x) = (2x - 3)e^x$

f) $f_6(x) = (x^2 + 1)e^x$

g) $f_7(x) = \frac{e^x}{x}$

h) $f_8(x) = e^{2x} - e^{-x}$

Exercice 7 Tangentes à la courbe de la fonction exponentielle

●●○

La figure 1 représente la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction exponentielle et ses tangentes T_0 et T_1 aux points d'abscisses 0 et 1.

7.1 Déterminer une équation de T_0 et une équation de T_1 . Vérifier que T_1 passe par l'origine du repère.

7.2 Soit a un réel. Montrer que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a a pour équation $y = e^a(x - a + 1)$, puis qu'elle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $a - 1$.

7.3 En déduire une construction simple de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 , et la tracer sur une figure analogue.

7.4 Existe-t-il une tangente à $\mathcal{C}$ de coefficient directeur -1 ? Justifier.

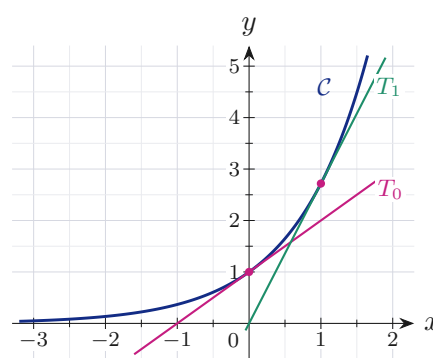


Figure 1 — La courbe $\mathcal{C}$ et deux tangentes

Exercice 8 Les fonctions $t \mapsto e^{kt}$ et les suites géométriques

●●○

Pour tout réel k , on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(t) = e^{kt}$. La figure 2 représente les courbes des fonctions f_{-1} , $f_{-0,5}$, $f_{0,5}$ et f_2 , dans le désordre.

8.1 Justifier que toutes les courbes des fonctions f_k passent par le point $A(0; 1)$.

8.2 Calculer $f'_k(t)$, puis étudier le sens de variation de f_k selon le signe de k . Que se passe-t-il si $k = 0$?

8.3 Quel est le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe de f_k ? En déduire la fonction associée à chacune des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$.

8.4 Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = e^{0,5n}$ et $w_n = 3e^{2n+1}$. Montrer que les suites (u_n) et (w_n) sont géométriques (préciser premier terme et raison) et donner leur sens de variation.

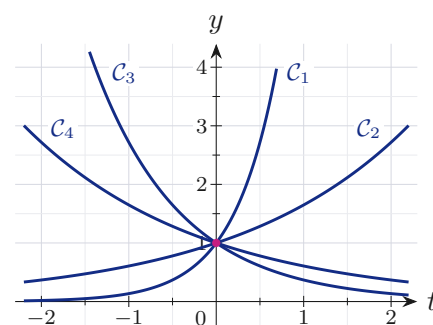


Figure 2 — Quatre courbes $t \mapsto e^{kt}$