

Exercices 2 Fonction exponentielle

Application : médicament, iode radioactif, café qui refroidit, abonnés, méthode d'Euler

5 exercices · niveau ●●○ · durée conseillée : 2 h · calculatrice autorisée



R. RINGUET · 2026 – 2027

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle par une fonction $t \mapsto C e^{kt}$ et l'interpréter.
- Relier une fonction $t \mapsto C e^{kt}$ à une suite géométrique ; étudier une fonction du type $(at + b) e^{kt}$.
- Déterminer un seuil par lecture graphique ou par balayage (tableau de valeurs, programme Python).
- Construire une approximation de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler.

Exercice 1 Concentration d'un médicament

●●○

Un patient prend un comprimé à l'instant $t = 0$. La concentration du principe actif dans le sang, en milligrammes par litre ($\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$), est modélisée pour $t \in [0 ; 12]$ (t en heures) par

$$C(t) = 8t e^{-0,5t}.$$

Sa courbe est tracée ci-contre (figure 1).

- 1.1 Montrer que $C'(t) = 4(2 - t) e^{-0,5t}$. Dresser le tableau de variations de C sur $[0 ; 12]$.
- 1.2 Quelle est la concentration maximale ? Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?
- 1.3 Déterminer une équation de la tangente à la courbe en $t = 0$. Que représente son coefficient directeur ?
- 1.4 Le médicament est efficace lorsque la concentration est supérieure ou égale à $4 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Lire graphiquement la période pendant laquelle il est efficace. À l'aide d'un tableau de valeurs de pas 0,1, préciser cette période au dixième d'heure près ; en déduire la durée d'efficacité.

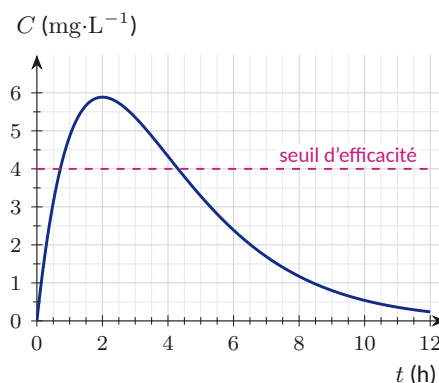


Figure 1 — Concentration du principe actif

Exercice 2 L'iode 131 à l'hôpital

●●○

L'iode 131, radioactif, est utilisé pour traiter certaines maladies de la thyroïde. L'activité d'un flacon, en mégabecquerels (MBq), est modélisée par $A(t) = 3\,700 e^{-0,0864t}$, où t est la durée écoulée en jours.

- 2.1 Calculer $A'(t)$ et vérifier que $A'(t) = -0,0864 A(t)$. En déduire le sens de variation de A .
- 2.2 Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $A(t + 8) = e^{-0,6912} A(t)$. Donner une valeur approchée de $e^{-0,6912}$ à 10^{-3} près et justifier que l'on appelle 8 jours la *demi-vie* de l'iode 131. En déduire que la suite de terme général $u_n = A(8n)$ est géométrique.
- 2.3 Le flacon peut être éliminé comme un déchet ordinaire lorsque son activité est inférieure à 1 % de l'activité initiale. À l'aide d'un tableau de valeurs, déterminer au bout de combien de jours entiers ce sera le cas. Les soignants retiennent qu'« au bout de dix demi-vies, il reste environ un millièème de l'activité » : vérifier cette règle à l'aide du modèle.

Exercice 3 Un café qui refroidit



On sert un café à 90°C dans une pièce à 20°C . Sa température, en degrés Celsius, t minutes plus tard, est $\theta(t) = 20 + 70e^{-0,08t}$.

3.1 Vérifier que $\theta(0) = 90$. Étudier le sens de variation de θ sur $[0; +\infty[$ et justifier que $\theta(t) > 20$ pour tout $t \geq 0$.

3.2 Montrer que $\theta'(t) = -0,08(\theta(t) - 20)$. Interpréter : le café refroidit-il plus vite au début ou à la fin ?

3.3 Expliquer ce que renvoie la fonction Python refroidir ci-dessus. Quelle valeur renvoie refroidir(55) ? Interpréter. Que se passe-t-il si l'on exécute refroidir(15) ?

```
1 from math import exp
2 def refroidir(s):
3     t = 0
4     while 20 + 70 * exp(-0.08 * t) > s:
5         t = t + 1
6     return t
```

Exercice 4 Les abonnés d'une chaîne de vidéos



Le nombre d'abonnés d'une chaîne de vidéos, t mois après sa création, est modélisé par $N(t) = ae^{kt}$, où a et k sont deux réels strictement positifs. La figure 2 représente la fonction N et sa tangente Δ au point d'abscisse 0.

4.1 Exprimer $N(0)$ et $N'(0)$ en fonction de a et k . Par lecture graphique, déterminer a et k .

4.2 Calculer $N(5)$ et contrôler sur la figure.

4.3 Montrer que le nombre d'abonnés augmente chaque mois d'un même pourcentage, à préciser (à 1 % près).

4.4 Déterminer par balayage au bout de combien de mois la chaîne dépassera 10 000 abonnés.

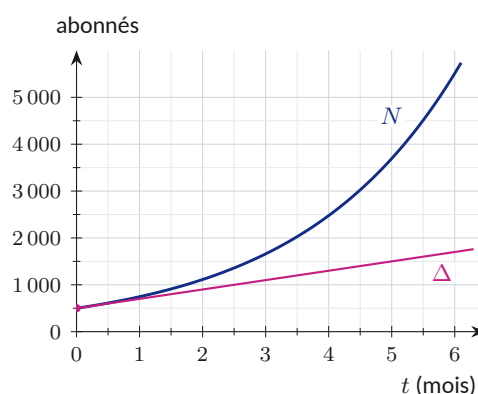


Figure 2 — Nombre d'abonnés

Exercice 5 La méthode d'Euler pour construire l'exponentielle



On cherche des valeurs approchées de la fonction $f = \exp$ en n'utilisant que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Pour un réel $h > 0$ « petit », on utilise l'approximation affine $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$.

5.1 Justifier que $f(x+h) \approx (1+h)f(x)$.

5.2 On choisit $h = 0,25$. On pose $x_n = 0,25n$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $y_{n+1} = (1+h)y_n$: y_n est une valeur approchée de $f(x_n)$. Exprimer y_n en fonction de n . Calculer y_4 et le comparer à e .

5.3 La figure 3 représente les points $M_n(x_n; y_n)$ pour $0 \leq n \leq 8$, et la courbe de $\exp$. Comparer y_8 et e^2 . Comment évolue l'écart ?

5.4 Expliquer pourquoi la fonction euler ci-dessous renvoie $(1+h)^{1/h}$ lorsque $\frac{1}{h}$ est entier. Donner, à 10^{-4} près, les valeurs de euler(0.1), euler(0.01) et euler(0.001). Que constate-t-on ?

```
1 def euler(h):
2     y = 1
3     for i in range(round(1 / h)):
4         y = (1 + h) * y
5     return y
```

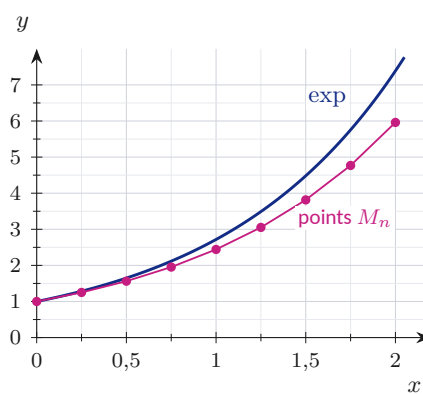


Figure 3 — Méthode d'Euler, $h = 0,25$