

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 7

Contrôle B

 Fonction exponentielle

Vrai ou faux, la courbe au-dessus de sa tangente, étude d'une fonction, deux cultures de bactéries

Durée : 1 h · sans calculatrice · 4 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

La calculatrice n'est pas autorisée. Tout résultat doit être justifié ; dans l'exercice 1, une réponse « vrai » ou « faux » non justifiée ne rapporte aucun point. Les résultats sont donnés sous forme exacte, sauf mention contraire. La qualité de la rédaction et la rigueur des démonstrations sont prises en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

5 pts ●●○

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Un contre-exemple suffit pour justifier qu'une affirmation est fausse.

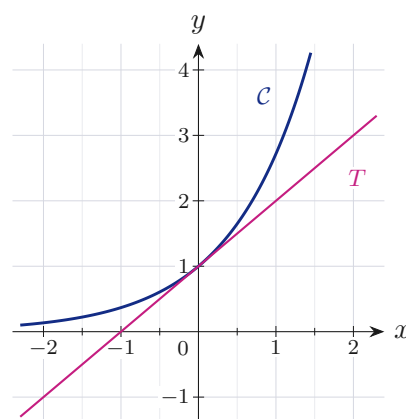
- 1.1 Pour tous réels a et b , $e^a + e^b = e^{a+b}$.
- 1.2 Pour tout réel x , $e^{2x} \geq e^x$.
- 1.3 La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{1-2n}$ est géométrique, de raison e^{-2} .
- 1.4 La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x e^{-x}$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- 1.5 L'équation $e^x + e^{-x} = 2$ admet 0 pour unique solution dans $\mathbb{R}$. On pourra multiplier les deux membres par e^x .

Exercice 2 La courbe de l'exponentielle est au-dessus de sa tangente en 0

5 pts ●●○

On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction exponentielle et T sa tangente au point d'abscisse 0 (figure 1). On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

- 2.1 Rappeler une équation de T .
- 2.2 Calculer $g'(x)$, étudier son signe, puis dresser le tableau de variations de g (sans les limites).
- 2.3 En déduire que, pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 2.4 En remplaçant x par $-x$, démontrer que, pour tout réel $x < 1$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

Figure 1 — La courbe $\mathcal{C}$ et la droite T

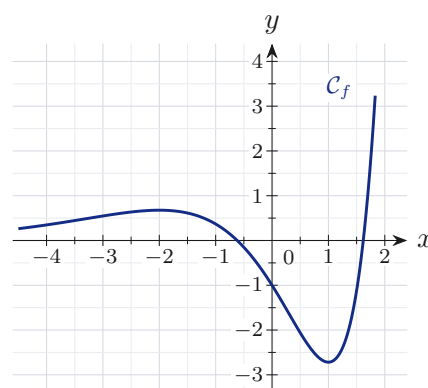
- 2.5 En utilisant les questions 2.3 et 2.4 avec $x = 0,1$, démontrer que $1,1 \leq e^{0,1} \leq \frac{10}{9}$. En déduire un encadrement de $e^{0,2}$ par deux fractions.

Exercice 3 Étude d'une fonction

5 pts ●●●○

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - x - 1)e^x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, tracée ci-contre.

- 3.1 Résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis dresser le tableau de signes de $f(x)$.
- 3.2 Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (x - 1)(x + 2)e^x$.
- 3.3 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (sans les limites), en précisant les valeurs exactes des extremums locaux.
- 3.4 Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- 3.5 Démontrer que, pour tout réel x , $f(x) \geq -e$.
- 3.6 Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point de même abscisse.

Figure 2 — La courbe $\mathcal{C}_f$

Exercice 4 Deux cultures de bactéries

5 pts ●●●○

Dans un laboratoire, on étudie deux cultures de bactéries. Le nombre de bactéries (en milliers), t heures après le début de l'observation, est modélisé par $N_1(t) = 200e^{0,5t}$ pour la première culture, et par $N_2(t) = 200e^{0,25t+2}$ pour la seconde, avec $t \in [0; 10]$.

■ DONNÉES $e^2 \approx 7,4$ • $e^4 \approx 54,6$

- 4.1 Calculer $N_1(0)$ et une valeur approchée de $N_2(0)$. Laquelle des deux cultures est la plus importante au départ ?
- 4.2 Montrer que $N_1'(t) = 0,5 N_1(t)$ et $N_2'(t) = 0,25 N_2(t)$. Interpréter.
- 4.3 Résoudre l'équation $N_1(t) = N_2(t)$, puis l'inéquation $N_1(t) > N_2(t)$. Donner une valeur approchée du nombre de bactéries de chaque culture à l'instant où elles sont égales.
- 4.4 On pose $R(t) = \frac{N_1(t)}{N_2(t)}$. Montrer que $R(t) = e^{0,25t-2}$. En déduire que la suite (r_n) définie par $r_n = R(n)$ pour $0 \leq n \leq 10$ est géométrique ; préciser son premier terme et sa raison.
- 4.5 À quel instant le nombre de bactéries de la seconde culture est-il égal à e fois celui de la première ?

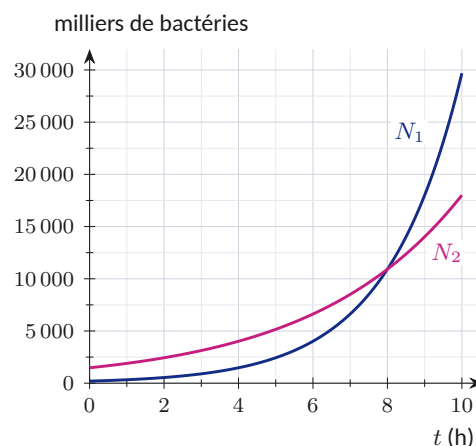


Figure 3 — Les deux cultures