

Contrôle A

Fonction exponentielle

QCM, une démonstration et des calculs, étude d'une fonction, décote d'une voiture

Durée : 1 h · sans calculatrice · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : **/ 20**

★ CONSIGNES

La calculatrice n'est pas autorisée. Les réponses du QCM ne demandent aucune justification ; dans les autres exercices, tout résultat doit être justifié par un calcul ou un raisonnement, et les résultats sont donnés sous forme exacte, sauf mention contraire. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

5 pts ●○○○

Pour chacune des cinq questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

- 1.1** Le nombre $\frac{e^5 \times e^{-2}}{e^4}$ est égal à :
- a) e^{-1} b) $e^{-\frac{5}{2}}$ c) e^7 d) e
- 1.2** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x}$ a pour dérivée la fonction f' définie par :
- a) $f'(x) = e^{-3x}$ b) $f'(x) = -3x e^{-3x}$ c) $f'(x) = -3e^{-3x}$ d) $f'(x) = 3e^{-3x}$
- 1.3** L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{x^2} = e^x$ est :
- a) $\{1\}$ b) $\{0\}$ c) $\emptyset$ d) $\{0; 1\}$
- 1.4** La tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 a pour équation :
- a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = e x$ d) $y = e x + 1$
- 1.5** La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 5e^{-0,4t}$:
- a) est croissante sur $\mathbb{R}$ b) s'annule pour $t = 0$
 c) est décroissante sur $\mathbb{R}$ d) prend des valeurs négatives

Exercice 2 Une démonstration du cours, puis des calculs

5 pts ●○○○

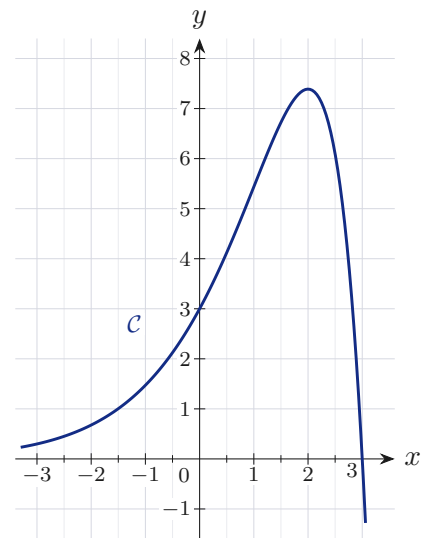
- 2.1** *Démonstration.* On rappelle que $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$, et que la fonction $x \mapsto \exp(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto -\exp(-x)$. On pose, pour tout réel x , $\varphi(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$. Calculer $\varphi'(x)$, puis démontrer que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ pour tout réel x . En déduire que la fonction $\exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, puis, en admettant que $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ et en écrivant $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$, que $\exp(x) > 0$.
- 2.2** Pour tout réel x , écrire $A = \frac{e^{2x+1} \times e^{-x}}{e^{x-3}}$ sous la forme e^m , puis développer et réduire $B = (e^x + e^{-x})^2 - e^{-2x}$.
- 2.3** Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $e^{4x-2} = e^{x+7}$; b) $e^{x^2-3} \leq e^{2x}$; c) $e^{-x} > e$.
- 2.4** a) Vérifier que, pour tout réel X , $(X-1)(X-e) = X^2 - (1+e)X + e$.
 b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0$.

Exercice 3 Étude d'une fonction

5 pts ●●●○

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 - x)e^x$, dont la courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-contre.

- 3.1 Résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
- 3.2 Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (2 - x)e^x$.
- 3.3 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (sans les limites). Quel est le maximum de f ? En quel point la tangente à $\mathcal{C}$ est-elle horizontale?
- 3.4 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
- 3.5 On donne $e^2 \approx 7,4$. À l'aide du tableau de variations, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 5$ dans l'intervalle $[0; 3]$. Contrôler sur la figure.

Figure 1 — La courbe $\mathcal{C}$

Exercice 4 La décote d'une voiture

5 pts ●●●○

Une voiture neuve est achetée 24 000 euros. On modélise sa valeur, en euros, t années après l'achat par $V(t) = 24\,000 e^{-0,2t}$, pour $t \in [0; 10]$.

■ DONNÉES $e^{-0,2} \approx 0,82$ • $e^{-1} \approx 0,37$ • $e^{-2} \approx 0,135$

- 4.1 Calculer $V'(t)$ et en déduire le sens de variation de V sur $[0; 10]$.
- 4.2 Montrer que, pour tout $t \in [0; 9]$, $V(t+1) = e^{-0,2} V(t)$. En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = V(n)$ pour $0 \leq n \leq 10$ est géométrique, et que la voiture perd environ 18 % de sa valeur chaque année.
- 4.3 Montrer que $V(t+5) = \frac{V(t)}{e}$ pour tout $t \in [0; 5]$. Donner une valeur approchée de $V(5)$ et de $V(10)$.
- 4.4 Résoudre dans $[0; 10]$ l'inéquation $V(t) < 24\,000 e^{-1}$ et interpréter le résultat.

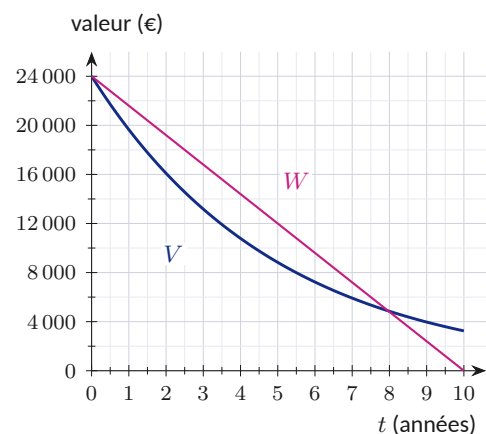


Figure 2 — Les deux modèles de décote

- 4.5 Un concessionnaire utilise un autre modèle : la voiture perd 2 400 euros chaque année, sa valeur est alors $W(t) = 24\,000 - 2\,400t$. Comparer les valeurs données par les deux modèles au bout de 5 ans, puis de 10 ans. Lequel semble le plus réaliste au bout de 10 ans?
- 4.6 Les deux modèles sont représentés sur la figure 2. Lire graphiquement la période pendant laquelle le modèle du concessionnaire donne une valeur supérieure à celle du modèle exponentiel.