

Approfondissement Fonction exponentielle

Pour aller plus loin : unicité et relation fonctionnelle, nombre e et intérêts, famille de courbes, équation à paramètre, au-delà de la tangente, ch et sh

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée (exercices 2 et 4)

Exercice 1 Démonstrations : unicité de l'exponentielle et relation fonctionnelle ●●●

On admet l'existence d'une fonction $\exp$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$, et l'on sait que, pour tout réel x , $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ (donc $\exp$ ne s'annule pas). On admet aussi que, pour tout réel b , la fonction $x \mapsto \exp(x + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \exp(x + b)$, et que la fonction $x \mapsto \exp(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto -\exp(-x)$.

- 1.1** *Unicité.* Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$. On pose $h(x) = g(x) \times \exp(-x)$. Démontrer que $h'(x) = 0$ pour tout réel x , puis que $g = \exp$.
- 1.2** *Relation fonctionnelle.* Soit y un réel fixé. On pose, pour tout réel x , $\varphi(x) = \exp(x + y) \times \exp(-x)$. Démontrer que φ est constante, puis que $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$ pour tous réels x et y .
- 1.3** En déduire que $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$, puis, en écrivant $\exp((n + 1)x) = \exp(nx) \times \exp(x)$, que $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ pour tout entier naturel n (on raisonnera de proche en proche). Étendre ce résultat aux entiers négatifs.
- 1.4** *Généralisation.* Soit k et C deux réels, et f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = kf$ et $f(0) = C$. En étudiant $x \mapsto f(x)e^{-kx}$, démontrer que $f(x) = Ce^{kx}$ pour tout réel x . Déterminer la fonction f telle que $f' = -0,3f$ et $f(0) = 50$.

Exercice 2 Le nombre e et les intérêts de Bernoulli ●●●

On place 1 euro pendant un an au taux annuel (irréaliste) de 100 %. Si les intérêts sont versés n fois dans l'année, au taux de $\frac{100}{n}$ % à chaque fois, le capital au bout d'un an vaut $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. On admet (voir le cours) que, pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$.

- 2.1** Calculer c_1, c_2, c_4 et, à la calculatrice, c_{12} et c_{365} (à 10^{-4} près). Qu'observe-t-on ?
- 2.2** En appliquant l'inégalité admise à $x = \frac{1}{n}$, démontrer que $c_n \leq e$ pour tout entier $n \geq 1$.
- 2.3** En l'appliquant à $x = -\frac{1}{n+1}$, démontrer que $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
- 2.4** En déduire que $0 \leq e - c_n \leq \frac{c_n}{n} \leq \frac{3}{n}$ (on admet que $e < 3$). À partir de quelle valeur de n est-on sûr que c_n est une valeur approchée de e à 10^{-3} près ?
- 2.5** Expliquer ce que renvoie la fonction Python ci-contre. À l'aide de la calculatrice ou d'un ordinateur, déterminer la valeur renvoyée par `encadre(0.01)`, et l'encadrement de e obtenu.
- 2.6** Plus généralement, pour un taux $r > 0$, le capital au bout d'un an vaut $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$. Démontrer qu'il est inférieur ou égal à e^r : c'est le capital obtenu avec des intérêts « composés en continu ».

```

1 def encadre(p):
2     n = 1
3     a = (1 + 1/n)**n
4     b = (1 + 1/n)**(n + 1)
5     while b - a > p:
6         n = n + 1
7         a = (1 + 1/n)**n
8         b = (1 + 1/n)**(n + 1)
9     return n, a, b

```

Exercice 3 Une famille de courbes



Pour tout réel $k > 0$, on note f_k la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_k(x) = x e^{-kx}$ et $\mathcal{C}_k$ sa courbe. La figure 1 représente $\mathcal{C}_{0,5}$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, ainsi que la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{e}$.

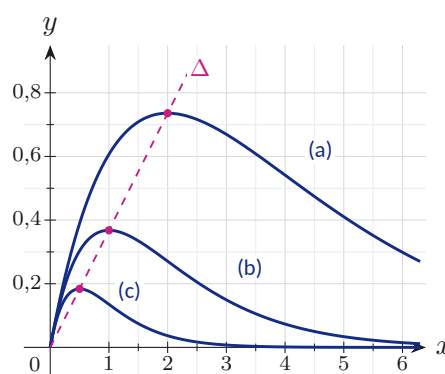


Figure 1 — Trois courbes $\mathcal{C}_k$ et la droite Δ

- 3.1 Montrer que $f'_k(x) = (1 - kx) e^{-kx}$. En déduire que f_k admet un maximum, atteint en un point M_k dont on donnera les coordonnées.
- 3.2 Démontrer que tous les points M_k appartiennent à la droite Δ .
- 3.3 Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ ont la même tangente à l'origine.
- 3.4 Soit $0 < k < k'$. Étudier le signe de $f_k(x) - f_{k'}(x)$ sur $[0; +\infty[$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k'}$. Associer chaque courbe de la figure 1 à sa fonction.

Exercice 4 Une équation à paramètre



Soit m un réel. On étudie l'équation (E_m) : $e^{2x} - 4e^x + m = 0$. On admet que, pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution réelle.

- 4.1 Justifier que le nombre de solutions de (E_m) est égal au nombre de solutions strictement positives de l'équation $X^2 - 4X + m = 0$.
- 4.2 Selon les valeurs de m , déterminer le nombre de solutions de (E_m) . On pourra utiliser la somme et le produit des racines d'un trinôme.
- 4.3 On prend $m = 3$. Montrer que 0 est solution de (E_3) , et que (E_3) admet une autre solution α , strictement positive, vérifiant $e^\alpha = 3$. À la calculatrice, démontrer que $1 < \alpha < 1,5$, puis encadrer α à 0,01 près par balayage.

Exercice 5 Au-delà de la tangente



On rappelle que, pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$.

- 5.1 On pose, pour $x \geq 0$, $u(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. Calculer $u'(x)$ et démontrer que $u'(x) \geq 0$. En déduire que $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
- 5.2 Démontrer de même que $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ pour tout $x \geq 0$. En déduire que $e \geq \frac{8}{3}$, puis un minorant de $e^{0,5}$ sous forme de fraction.
- 5.3 En déduire que, pour tout $x > 0$, $\frac{e^x}{x^2} \geq \frac{x}{6}$. Déterminer un réel A tel que $e^x \geq 1000 x^2$ pour tout $x \geq A$. (Hors programme — pour aller plus loin : on dit que l'exponentielle « l'emporte » sur les puissances de x .)

Exercice 6 Cosinus et sinus hyperboliques (hors programme — pour aller plus loin)



On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions ch et sh par $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. La courbe de ch est une *chaînette* : c'est la forme d'un câble suspendu par ses extrémités.

- 6.1 Démontrer que $\text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$, $\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x)$, $\text{ch}' = \text{sh}$, $\text{sh}' = \text{ch}$ et $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.
- 6.2 Démontrer que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, étudier son signe, puis dresser le tableau de variations de ch. En déduire que $\text{ch}(x) \geq 1$ pour tout réel x .
- 6.3 En posant $X = e^x$, résoudre l'équation $\text{ch}(x) = \frac{e^2 + 1}{2e}$.